Mechanik

Bewegung in 1D

$v(t) = at + v_0$; $v = \sqrt{2as}$

$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} g t^2$ Freier Fall

Horizontaler Wurf

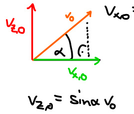
$\vec{a} = (0, 0, -g)$, $\vec{v}_0 = (v_{x,0}, 0, 0)$, $\vec{r} = (0,0,0)$; $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0} t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$

Schiefer Wurf

$\vec{a}_0 = (0,0,-g)$, $\vec{v}_0 = (v_{x,0}, 0, v_{z,0})$, $\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$; $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0} t \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z,0} t + z_0 \end{pmatrix}$

Abwurfhöhe

$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x,0}^2} x^2 + \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} x + z_0$



$v_{x0} = \cos\alpha \, v_0$; $v_{z,0} = \sin\alpha \, v_0$

Bewegung in 3D

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$; $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Wurfweite $z(x_w) = 0 \Rightarrow x_w = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\varphi) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 g z_0}{v_0^2 \sin^2\varphi}}\right)$

Scheitel $z'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\varphi)$ $\nearrow \varphi = 45°$ $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \left(1 \pm \sqrt{1 \pm \frac{4 z_0^2}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right)$

Optimaler Winkel $z_0 = 0 \Rightarrow \sin 2\varphi = 1$

$z_0 \neq 0 \Rightarrow \sin\varphi = \left(2 + \frac{2 g z_0}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Gleichförmige Kreisbewegung

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\omega = \dot{\varphi} = \text{const.}$; $\vec{v} \perp \vec{r}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\omega = \frac{v}{r}$

Zentripetalbeschleunigung

$\vec{a}_{zp} = -R\omega^2 \vec{e}_r$ $a_{zp} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$

↳ zeigt zu Kreismittelpunkt

$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ $a = \omega \cdot v = \frac{v^2}{r}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Galileitransformation

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$; $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$; $\vec{a}' = \vec{a}$

mit S-Laborsystem, S'-mitbewegt und $\vec{u}$ v von S' in S

Newtonsche Axiome

I) Trägheitsprinzip: $p = mv = \text{const} \Leftrightarrow F = 0$

II) Dynamik: $F = m\dot{p} = m \cdot a$

III) Reaktionsprinzip: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Kräfte

Gravitation $F_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$

$\vec{F} = m_T \cdot \vec{a}$ → träge Masse

$\vec{F} = m_S \cdot \frac{G M_E}{r_E^2} \vec{e}_r = m_S g$ → schwere Masse

$m_{schwer} = m_{träge}$

Hooksches Gesetz $F_x = F_x(\Delta x) = -k_f \cdot \Delta x$

Normalkraft F_N wirkt senkrecht zur Oberfläche

Reibung $F_G = \mu_G \cdot F_N$ Gleitreibung

$F_H = \mu_H \cdot F_N$; $\mu_H > \mu_G$ Haftreibung

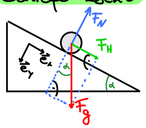
$\mu_H > \mu_G$

$\mu_R = \tan\alpha$ (schiefe Ebene)

Zentripetalkraft

$F_{zp} = m\omega^2 r$; $\vec{F}_{zp} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{mv^2}{r}$

Schiefe Ebene



$\vec{F}_g = m\vec{g}$

$\vec{F}_N = mg\cos\alpha \, \vec{e}_y$

$\vec{F}_H = mg\sin\alpha \, \vec{e}_x$

$F_H = m\ddot{x} =$

Arbeit, Energie, Leistung

Arbeit $W = F \cdot \Delta x$

$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) \frac{d\vec{r}}{dt} dt$

wichtige Energien: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

$E_{pot} = mgh$

$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2$

Energieerhaltung

$E_{kin} + E_{pot} = E_{ges} = \text{const}$

nur konservative Kräfte

$dE_{kin} = F dx = -dE_{pot}$

System verrichtet Arbeit

$W > 0$: E_{kin} nimmt zu

$W < 0$: E_{kin} nimmt ab

$W > 0$: E_{pot} nimmt ab

$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \, d\vec{r} = E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) = \Delta E_{kin}$ $W < 0$: E_{pot} nimmt zu

$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \, d\vec{r} = E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1) = \Delta E_{pot}$ $F = -\vec{\nabla} E_{pot}$

Konservative Kraft $\Leftrightarrow \oint \vec{F} \, d\vec{r} = 0$

Leistung $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

Energiediagramme

Minimum: stabil / metastabil

Maximum: labiles Gleichgewicht

Bsp: Gravitationskraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r = f(r) \vec{e}_r$

Hom. Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{pmatrix}$ ↳ $E_{pot}^{grav} = -G \frac{mM}{r}$

Zentralkraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$ $\Phi = -G \frac{M}{r}$

Stöße

kollinear, elastisch

$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

im Schwerpunktsystem

$v_S = \frac{v_1 m_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}$ $v_1^* = v_1 - v_S = \frac{m_2 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$p_1^* = m_1 v_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$ $v_2^* = v_2 - v_S = \frac{m_1 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

$p_2^* = m_2 v_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$ $p_1^{*\prime} = -p_1^*$ $p_2^{*\prime} = -p_2^*$

nicht zentral, elastisch, SP-System

$p_S^* = 0$; $p_1^* = -p_2^*$; $|p_1^{*\prime}| = |p_2^{*\prime}|$ inelastisch: Umwandlung von E_{kin}

Allgemein: $E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} + Q$

$Q = 0$: elastisch

$Q > 0$: inelastisch

$Q < 0$: superelastisch

Systeme von Massenpunkten

Schwerpunkt $\vec{r}_S = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$

$= \frac{1}{M} \cdot \int_V \vec{r} \, dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \, dV$

Geschwindigkeit $\vec{v}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$

Impuls $\vec{p}_S = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_S$

Allg. Impulssatz $\dot{\vec{p}}_S = M \vec{a}_S = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$; $\vec{a}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

abgeschl. System $\Leftrightarrow F_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_S = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}$

Raketenantrieb

$dv = -v_B \frac{dm}{m}$; $v(t) = v_B \ln \frac{m_0}{m(t)}$

Kräftefreie Rakete

Allg. $m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{dm(t)}{dt} \vec{v}_B + \vec{F}$

$\Rightarrow$ nur $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ berücksichtigt p des ausströmenden Gases nicht

Mechanik des starren Körpers

Volumen $V = \int dV$

Masse $M = \int dm = \int \rho(\vec{r}) \, dV$

Schwerpunkt $\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r} \, dm}{M} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) \, dV$

Geschwindigkeit $\vec{v}_{Si} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{Si}$; $\vec{v}_{Si} = \vec{v}_i - \vec{v}_S$

$\Rightarrow \vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_S}_{\text{Translation}} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_{Si})}_{\text{Rotation}}$

Drehmoment und Kräftepaare

Hebelgesetz $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v} = I\vec{\omega}$

Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$ bzw. $M = r \cdot F \sin(\angle(\vec{r}, \vec{F}))$

Gesamt $\sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_S \times \vec{F} \Rightarrow$ im Schwerpunkt: $\vec{r}_S \times \vec{F}_S = 0$

Translation $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$

Rotation $\vec{M} = \sum \vec{r}_{Si} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i$

Statik $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0$; $\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$

Rotation

$E_{kin} = \frac{1}{2} M v_S^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_{Si}^2$

$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ $P = M\omega$

Translation	Rotation
$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} = I \dot{\vec{\omega}}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$

$\alpha = \frac{a}{r}$

neue Bewegungsgleichungen:

$\omega = \alpha t + \omega_0$

$\varphi = \frac{1}{2} \alpha t + \omega_0 t + \varphi_0$

Trägheitsmomente

$I = \int r_\perp^2 \, dm$

Trägheitsmomente sind additiv!

Kugel $I = \frac{2}{5} m R^2$

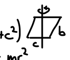
Zylinder $I = \frac{1}{2} m R^2$

Stab, dünn $I = \frac{1}{12} m L^2$

Hohlzylinder $I = m R^2$

Würfel $I = \frac{1}{6} m a^2$

Quader $I = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$



Kugelschale $I = \frac{2}{3} m r^2$

Steinerscher Satz $I_{ges} = I_S + r_S^2 \cdot m$

Zylinderkoordinaten

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$; $dV = r \, d\varphi \, dr \, dz$

Kugelkoordinaten

$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$

Systeme von Massenpunkten

$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$; $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \dot{\vec{L}}$

wenn $\vec{M} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const.}$

Mechanik deformierbarer Körper

Hooksches Gesetz $\frac{F}{A} = \sigma = E \frac{\Delta L}{L} = E\varepsilon$

Elastizitätsmodul

Elongation

Zugspannung

$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}}$

Poissonsche Zahl

Querkontraktion $\frac{\Delta D}{D} = -\mu \frac{\Delta L}{L}$

Volumenänderung $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$

Druck $p = \frac{F}{A}$

Kompression $\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p$

$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$

Biegung: $J = \int \eta^2 \, dA$

Quader $J = \frac{1}{12} b h^3$

Krümmung: $\varkappa = \frac{1}{\rho} = M / EJ$

Scherung / Torsion für kleine Scherwinkel $\tau = G \cdot \alpha$

Zugspannung $\sigma = \frac{F_N}{A}$

Scherspannung $\tau = \frac{F_t}{A}$

$G = \frac{\text{Scherspannung}}{\text{Scherung}} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_t / A}{\Delta x / L} = \frac{F_t / A}{\tan\vartheta}$

Hydrostatik / Gase

$p = F/A \Rightarrow$ überall gleich (Pascal)

$\rho = m/V$

Boyle-Mariotte wenn $T = \text{const.} \Rightarrow pV = \text{const}$

hydrost. Druck $p = p_0 + \rho g h$ ← stat. Flüssigk.

barom. Höhenf. $p(h) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right)$ ← Gas

Auftrieb $F_A = g\rho V = gm$

Überdruck $p_e = p - p_{at}$

Volumenstrom $I_V = Av$

Strömung

ohne Reibung: nicht-viskos, inkompressibel

Kontinuitätsgleichung $I_V = Av = \text{const}$

Bernoulli $p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}$

Venturi (waagerecht) $p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}$

↳ Engstelle: v steigt, p fällt

mit Reibung:

Hagen-Poiseuille $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta L} \cdot R^4$

Reibung (Newton) $\tau = \frac{F_R}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy} \Rightarrow F_R = \eta A \frac{v_x}{d}$

Reynolds: $R_e < R_{e,krit}$: laminar

$R_e > R_{e,krit}$: turbulent

Strömungswiderstand

Laminar $F_W \sim v \Rightarrow F_W = F_R = 6\pi\eta r v$ (Stokes; Kugel)

Turbulent $F_W \sim v^2 \Rightarrow F_W = C_W \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 A$

Wärmelehre

Boyle-Mariotte-Gay-Lussac $\frac{pV}{T} = \text{const}$

Druck $p = \frac{1}{3} N m \bar{v}^2 = \frac{2}{3} N \bar{E}_{kin}$

Anzahl pro Volumen

innere Energie $U = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{N_A k_B}_{R} f T$

Zustandsgleichung (ideale Gase) $pV = n \cdot N_A \cdot k_B \cdot T = n \cdot R \cdot T$

Äquipartitionsprinzip $\bar{E}_{kin} = f \cdot \frac{1}{2} k_B T$ / $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

$v = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_{mol}}}$

$\bar{E}_{innere} = U = \underbrace{\bar{E}_{tr}}_{3} + \underbrace{\bar{E}_{rot}}_{2 \text{ für 2atomig}} + \underbrace{\bar{E}_{vib}}_{2 \text{ pro Schw.f.}} + \cancel{\bar{E}_{el}}$

Gay-Lussac $V(T) = V_0(1 + \gamma T)$

p=const.; T in °C

bei 0°C

Längenausdehnung $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$ bzw. $L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$

Kelvin

Volumenausdehnung $\Delta V = \gamma V_0 \Delta T$ bzw. $V = V_0(1 + \gamma \Delta T)$

Thermodynamik

1. HS $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

$\Delta Q > 0$: Wärmezufuhr

$\Delta Q < 0$: Wärmeabgabe

$\Delta W > 0$: Arbeit am System verrichtet

$\Delta W < 0$: Arbeit vom System verrichtet

Wärmemenge $Q = cm\Delta T = c_m n \Delta T$

3. HS Nullpunkt nicht erreichbar

Latente Wärme $Q = \lambda m$

Volumenarbeit $W = -\int_{V_1}^{V_2} p \, dV$

2. HS „Wärme fließt von selbst nur von wärmeren zum kälteren Körper; nie umgekehrt"

molare Masse / Volumen

$M = \frac{m}{n} \left[\frac{g}{mol}\right]$; $V_m = \frac{V}{n} \left[\frac{L}{mol}\right]$

$V_m(0°C) = 22{,}4 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$

$V_m(20°C) = 24{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{mol}$

$Pa = \left[\frac{N}{m^2}\right]$

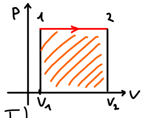
Spezielle Zustandsänderung idealer Gase

für alle gilt: $pV = nRT$; $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

isobar; $p = const$ — $\Delta p = 0$

Expansion

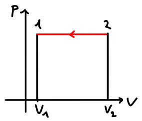
$\Delta W_{12} = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$
$\Delta Q_{12} = n c_p (T_2 - T_1)$
$\Delta U_{12} = \Delta W_{12} + \Delta Q_{12} = n \cdot (c_p - R)(T_2 - T_1)$



$A = \Delta W$

Kompression

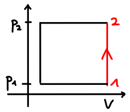
$\Delta W_{21} = p \cdot (V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$
$\Delta Q_{21} = n \cdot c_p (T_1 - T_2) = -n c_p (T_2 - T_1)$
$\Delta U_{21} = \Delta Q_{21} + \Delta W_{21} = n(R - c_p)(T_2 - T_1)$



isochor; $V = const$ — $\Delta V = 0$

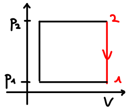
Druckzunahme

$\Delta W_{12} = 0$
$\Delta Q_{12} = n c_v (T_2 - T_1)$
$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} = n c_v (T_2 - T_1)$



Druckabnahme

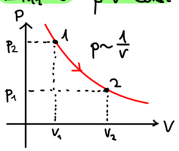
$\Delta W_{21} = 0$
$\Delta Q_{21} = n c_v (T_1 - T_2)$
$\Delta U_{21} = \Delta Q_{12} = n c_v (T_1 - T_2)$



isotherm; $T = const$ — $\Delta T_{12} = 0$ — $p \cdot V = const$

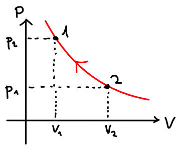
Expansion

$\Delta U_{12} = 0$
$\Delta Q_{12} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
$\Delta W_{12} = -nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$



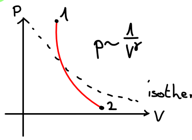
Kompression

$\Delta U_{12} = 0$
$\Delta Q_{12} = nRT \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$
$\Delta W_{12} = -nRT \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$



adiabatisch; $Q = const$ — $\Delta Q = 0$

$\Delta Q_{12} = 0$
$\Delta U_{12} = \Delta W_{12}$
$dU = dW$
$dU = \frac{1}{2} f n R\, dT = n c_v\, dT$
$dW = -p\,dV = -nRT \cdot \frac{dV}{V}$



molare Wärmekapazität

$c_p = c_v + R$
$c_v = \frac{f}{2} R$
$c_p = \frac{f+2}{2} R$

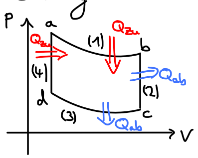
Freiheitsgrade

Translation: #3
Rotation: #2 (für 2-atomig)

Adiabatengleichungen

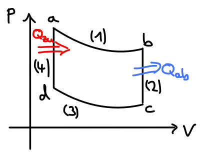
$pV^\gamma = const$
$TV^{\gamma-1} = const$
$T^\gamma p^{1-\gamma} = const$
$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$

Stirling



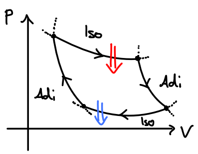
(1) Isotherm $(a \to b)$ <0
$\Delta W_{ab} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) = -\Delta Q_{ab}$
(2) Isochore $(b \to c)$
$\Delta Q_{bc} = n c_v (T_2 - T_1)$ <0
(3) Isotherm $(c \to d)$ >0
$\Delta W_{cd} = -nRT_2 \ln\left(\frac{V_a}{V_b}\right) = -\Delta Q_{cd}$
(4) Isochore $(d \to a)$
$\Delta Q_{da} = n c_v (T_1 - T_2)$ >0

Ottomotor

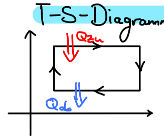


(1) Adiabate $(a \to b)$
$\Delta Q = 0$; $\Delta W_{ab} = n c_v (T_b - T_a)$
(2) Isochore $(b \to c)$
$\Delta W = 0$; $\Delta Q_{bc} = n c_v (T_c - T_b)$ <0
(3) Adiabate $(c \to d)$
$\Delta Q = 0$; $\Delta W_{cd} = n c_v (T_d - T_c)$
(4) Isochore $(d \to a)$
$\Delta W = 0$; $\Delta Q_{da} = n c_v (T_a - T_d)$ >0

Carnot



T-S-Diagramm



Prozesse

rechtsläufig: Wärme → Arbeit
⇒ System leistet Arbeit
linksläufig: Arbeit → Wärme
⇒ Arbeit am System verrichtet

Wirkungsgrad Carnot

$\eta_C = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Leistungszahl

$\varepsilon_{Wärme} = \frac{|Q_W|}{\Delta W} = \frac{1}{\eta}$; $\varepsilon_{Kälte} = \frac{Q_K}{\Delta W} = \frac{1}{\eta} - 1$

Wirkungsgrad Ottomotor

$\eta_O = 1 - \frac{T_b}{T_a} < \eta_C$

Wirkungsgrad

$\eta = \frac{|\Delta W|}{Q_W} = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{Q_W - |Q_K|}{Q_W} = 1 - \frac{|Q|_K}{Q_W}$

Entropie

$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$ $\Delta S = \int \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm}{T}\, dT$

$\Delta S_W = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$

$J = \int_V r_\perp^2 \rho\, dV$
$= \rho \int_V r^2 \cdot r\, dr\, d\varphi\, dz$

Einheiten

$1\,bar = 100k\,Pa$

$°C \xrightarrow{+273,15} K$
$°C \xrightarrow{\times\frac{9}{5}+32} °F$

$1\,atm = 101325\,Pa$

$M = \frac{m}{n}$

$m \xleftarrow{10^{-2}} cm \xleftarrow{10^{-1}} mm$
$m^2 \xleftarrow{10^{-4}} cm^2 \xleftarrow{10^{-2}} mm^2$
$l \xleftarrow{10^{3}} m^3 \xleftarrow{10^{-6}} cm^3 \xleftarrow{10^{-3}} mm^3$
$\frac{kg}{m^3} \xleftarrow{10^{3}} \frac{g}{cm^3}$
$Pa \xleftarrow{10^{5}} bar$
$\frac{m}{s} \xleftarrow{:3,6} \frac{km}{h}$

$[P] = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = W$
$[E] = J = Nm = Ws = \frac{kg\,m^2}{s^2}$
$[I] = kg\,m^2$
$[L] = \frac{kg\,m^2}{s}$
$[M] = \frac{kg\,m^2}{s^2}$

Ansätze

Bewegung

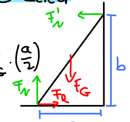
Torwandschießen
$d = v_0 \cos\alpha\, t \Rightarrow t = ...$
$v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 = h = \frac{1}{2}(D_L - D_B)$

Zug verpasst
$v_Z = v_P$ & $s_Z = s_P$

Abgrund (Pendel)
$F_{ges} = F_g + F_{Zp}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = mgh = E_{pot}$

Froschweitsprung
$\alpha_{max} = 45°$

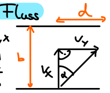
Stehende Leiter
$F_N = F_G$
$F_N' = F_R$
$F_N' h = F_G \left(\frac{a}{2}\right)$



Beschleunigte Bewegung (ICE)
$0 = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = ...$
$x = v_0 t$
$y = \frac{1}{2} a t^2$ mit $a = \frac{v_{ICE}^2}{R}$

Klassisch Looping
$h = ?$; oberer Punkt:
$F_g = F_{Zp} \Rightarrow v^2 = ...$
$mgh' = \frac{1}{2} m v^2$

Schwimmer im Fluss
$\vec{v}' = \vec{v}_{0y} + \vec{v}_{Ay} + \vec{v}_{Ax}$
$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{d'}{b}$



Drehmoment

Hängendes Schild
$\frac{1}{2} M_S g + L m g = F_{Seil}^Y \cdot L$

Statik
$\sum \vec{M}_{ges} = 0$
$0 = \frac{a}{2} \vec{D} \times \vec{F}_G + \vec{D} \times \vec{F}_S$

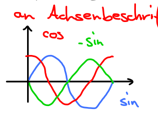
Jo-Jo
$M = mgR = I\dot{\omega} = I \frac{a}{R}$
$I = \frac{3}{2} m R^2$ (Steiner)
$F_S = F_g - F_a$ / $F_S = F_g + F_a$

Unwucht
$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

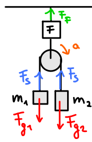
Rollender Zylinder
Kräfte:
I) $ma = mg \sin\alpha - F_R$
II) $M = r F_R$
⇒ Drehmoment nur Kräfte die nicht im SP angreifen
Energieansatz:
$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$
wenn $I_1 > I_2 \Rightarrow v_2 > v_1$

Schießerei-Saloon
1) Drehimpulserhaltung
$L_{ki} + L_{Si} = L_{kf} + L_{Sf}$
Steiner ⇒ Drehachse Schild
$\omega = ...$
2) Energieerhaltung: $E_{pot} = E_{rot}$
$h = ... \Rightarrow \alpha = ...$

Klirrendes Glas
an Achsenbeschriftung denken!



Atwood I



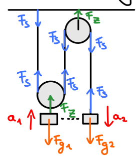
I) $m_1 a = F_S - m_1 g$
II) $m_2 a = m_2 g - F_S$
$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g$

Atwood II
Energieansatz:
$E_{pot,m_2} = E_{pot,m_1} + E_{rot} + E_{kin,ges}$
Kräfte:
I) $m_1 a = F_S - m_1 g$
II) $m_2 a = m_2 g - F_S - F_R$
III) $M = I\alpha = R \cdot F_R$
$\Rightarrow F_R = \frac{I}{R^2} a$

Drehimpulserhaltung
Ballistik
$rmv = I\omega$; $\omega = \frac{v'}{L}$
$E_{kin} = E_{rot}$

Kraftmesser / Aufzug
bei Kraftmesser: wer bringt F_N auf
⇒ Person wird leichter wenn Aufzug nach unten beschleunigt

Flaschenzug

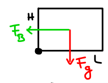


I) $m_1 a_1 = F_2 - m_1 g$
II) $m_2 a_2 = m_2 g - F_3 = m_2 g - \frac{1}{2} F_2$
III) $a_2 = -2 a_1$ $(\Rightarrow -\Delta s_2 = 2\Delta s_1)$

Auf dem Karussell
$L_0 \omega_0 = L_1 \omega_1$ $I_1 = I_0 + a m R^2$
$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1$ Steiner
Kind; tangential; gegen Bewegungsr.
$L' = L_{Karussell} - L_{Kind}$

Autoreifen
$\vec{M} = R\binom{\omega t}{1}$ $\vec{r} = R\binom{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}$
$\vec{M} - \vec{r} = \binom{R\omega t - R\sin(\omega t)}{R - R\cos(\omega t)}$

Lose Fracht



$0 = \frac{H}{2} F_B - \frac{L}{2} F_g$
$\Rightarrow a = \frac{Lg}{H}$

Thermodynamik

Einmachglas
"Vakuum über Wasser"
"Dampfdruck"

Hydrostatik

$p_1 V_1 = p_0 V_0$

Ballonfahrt
1) $\rho_L V_B = m_B$
2) Boyle-Mariotte: $\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_0}{\rho_0}$
3) barometr. Höhenformel

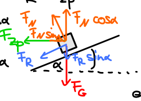
Auslaufendes Fass
Bernoulli ⇒ $v_2 = \sqrt{2gh}$
$A_1 v_1 = A_2 v_2$
$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}$

Thermische Längenausdehnung
Annahme: $\Delta l_2 = \Delta l_{Fe}$ (wenn ausgleichen)

Feuerwehrschlauch
Bernoulli ⇒ $v_1 = ...$
Kontinuitätsgl. ⇒ $v_2 = ...$

Weihnachtsmann
$F_A = F_g$
↳ Volumen das verdrängt wird mit ρ_{Wasser}
$W = \int_s (F_g - F_A)\, ds$

Kurvenfahrt bei Regen
$F_R = F_{Zp}$
y-Richtung:
$F_N \cos\alpha = F_g + F_R \sin\alpha$
x-Richtung:
$F_{Zp} = F_R \cos\alpha + F_N \sin\alpha$

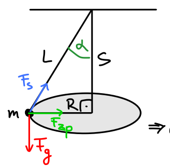


$F_G = F_N(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)$
$F_{Zp} = \sin\alpha\, F_N + \mu \cos\alpha\, F_N$
mit $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}$ erweitern

Getterpumpe
$\bar{v}_x = \int_0^\infty n(v_x)\, v_x \cdot A \cdot dv_x$

Abkühlung Wasserbad
$Q_{ab} + Q_{auf} = 0$
$\Rightarrow m_{Al} c_{Al} (T_E - T_{Al}) = -m_W c_W (T_E - T_W)$
$T_E = \frac{m_W c_W T_W + m_{Cu} c_{Cu} T_{Cu}}{m_{Cu} c_{Cu} + m_W c_W}$

Kreis-Pendel



Torsion
$M = -K_D$ mit $K_D = \frac{\pi G R^4}{2L}$

$L^2 = R^2 + S^2$
$\tan\alpha = R/S = \frac{R}{L^2 - R^2}$
$\tan\alpha = \frac{F_{Zp}}{F_g}$
$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - R^2}}}$

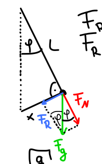
Elastischer Stoß — binomische Formel
Energie: $m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$
Impuls: $m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$
dividieren: $v_1 + v_1' = v_2' + v_2$

Auffahrunfall $t_{v_0} = \frac{v_0}{a}$
LKW: $v(t) = v_0 - at$
PKW: $\begin{cases} v_0, & t \le \Delta t \\ v_0 - a'(t - \Delta t), & \text{sonst} \end{cases}$

geostationär
$F_{Zp} = F_G$
$m\omega^2 R = G \frac{mM}{R^2}$

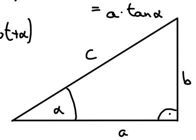
Zentralkraftfeld
$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot} = -\frac{dV}{dr} \vec{\nabla} r = A_n \frac{mM}{r^{n+1}} \vec{e}_r$
$\ddot{r} m = A_n \frac{mM}{r^{n+1}}$ int. Faktor $\dot{r}$
$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \dot{r}^2 = A_m M \frac{d}{dt} \frac{r}{r^{n+1}}$
$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - A \frac{mM}{r^n} = c$

mathematisches Pendel



$F_R = -mg\sin\varphi$
$F_R = ma \Rightarrow \ddot{x} = \frac{F_R}{m} = \frac{-\cancel{m}g\sin\varphi}{\cancel{m}} = -g\varphi$ $\sin\varphi = \varphi$
$= -\frac{g}{L} \cdot x$
$\tan\varphi = \frac{x}{L} \overset{KWN}{=} \varphi$
$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{L} \cdot \varphi(t)$
$\varphi(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$
$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t)$

$a = \cos\alpha \cdot c$
$b = \sin\alpha \cdot c$
$= a \cdot \tan\alpha$



Nützlich

Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $O = 4\pi r^2$
Kreis: $A = \pi r^2$; $U = 2\pi r$
Zylinder: $V = \pi r^2 h$; $M = 2\pi r h$; $O_{ges} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\beta \sin\beta$
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$
$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$