Elektrostatik

$F_G = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$ // vs.

$W = Q \cdot U$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\cdot q} & W \\ \uparrow{\cdot d} & & \uparrow{\cdot d} \\ E & \xrightarrow{\cdot q} & F \end{array}$$

Coulomb $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$

E-Feld $E = \frac{F_C}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ $\Big\}$ $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$

Elektr. Fluss $\Phi = \int_A \vec{E}\, d\vec{A}$

Gaußsches Gesetz (1. Maxwell) $\Phi = \boxed{\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0}}$ $\Big\}$ $\boxed{E = \frac{Q_{innen}/\varepsilon_0}{A}}$

Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{A}$

Raumladungsdichte $\rho = \frac{Q}{V}$

E-Feld innerhalb von Leitern ist 0

Gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, entgegengesetzte stoßen sich ab.

Zirkulationsgesetz $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0$ $\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})}$

Erst Vektoren!!!

elektr. Spannung $U_{12} = -\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{21}$ (2 → hohes Pot, 1 → niedrig)

$\boxed{U = E \cdot d}$ $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq_1}{r}$ / $\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R}-\vec{r}|} dV$

elektr. Dipol $E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$

Arbeit $\boxed{W = -\int_1^2 F\, ds}$

Kondensator:

$Q = CU \Rightarrow C = \frac{Q}{U}$ $E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$ $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}}$

$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ **Ansatz:** $U_0 = d_1E_1 + d_2E_2 + \ldots$ $W = Fd$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$ **Ersatzschaltbild:** $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

Dielektrika

$E_{Diel} = \frac{D}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$

$C_{Diel} = \varepsilon_r C_{Vak}$ ($\varepsilon_r > 1$) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$E_{Diel} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_{Vak}$ **Kondensator:** $C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d}$

Polarisation $\vec{P} = \frac{qd}{V}$ ← distance between charges

el. Suszeptibilität $\varkappa = \varepsilon_r - 1$

Diel. Verschiebung $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_{Diel} + \vec{P} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}_{Diel} = \varepsilon_0\vec{E}_{Vak}$

Energiedichte $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$

Elektrostatik

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ / $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{P} = \varepsilon_0\varkappa_e\vec{E}$

$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ mit $\vec{p} = q\vec{d}$

$\varepsilon_r = 1 + \varkappa_e$ / $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\varkappa_e)$

Magnetostatik

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ / $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

$\vec{M} = \varkappa_m\vec{H}$

$\vec{M} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} \vec{\mu}_i$ mit $\vec{\mu} = I\vec{A}$

$\mu_r = 1 + \varkappa_m$ / $\mu = \mu_0\mu_r = \mu_0(1+\varkappa_m)$

Grenzflächen

$E_{Vak}^{\parallel} = E_{Diel}^{\parallel}$ $E_{Vak}^{\perp} = \varepsilon_r E_{Diel}^{\perp}$

$D_{Vak}^{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon_r} D_{Diel}^{\parallel}$ $D_{Vak}^{\perp} = D_{Diel}^{\perp}$

$H_{\parallel}^{(1)} = H_{\parallel}^{(2)}$ $\mu_1 H_{\perp}^{(1)} = \mu_2 H_{\perp}^{(2)}$

$B_{\parallel}^{(1)} \cdot \frac{1}{\mu_1} = B_{\parallel}^{(2)} \cdot \frac{1}{\mu_2}$ $B_{\perp}^{(1)} = B_{\perp}^{(2)}$

Maxwell-Gleichungen

allgemein gültig

2 $\oint_A \vec{B}\, d\vec{A} = 0$; $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

Elektrodynamik

3 $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{A}$; $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (→ Induktionsgesetz)

4 $\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$; $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Statik gesamt 3 $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0$; $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ (← Zirkulationsgesetz)

Ampèresches Gesetz

Statik & Vakuum

1 $\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$; $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (← Gaußsches Gesetz)

4 $\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I_{innen}$; $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

folgt dem B-Feld

Statik & Materie

1 $\oint \vec{D}\, d\vec{A} = Q_{frei}$; $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{frei}$

4 $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = I_{frei}$; $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}_{frei}$

4 $\int \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}\, d\vec{A}$ (Statik & Vakuum)

Chemiestuff

$1u \mathrel{\hat{=}} 1{,}66054 \cdot 10^{-27}$ kg

1 mol $\mathrel{\hat{=}} N_A$ Teilchen

Masse $m = \frac{n}{N_A} m_{mol}$

Dichte $\rho = \frac{m}{V}$

Anzahldichte $\frac{n}{V} = \frac{\rho N_A}{m_{mol}}$

Satz von Gauß

$\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\, d\vec{V}$

Satz von Stokes

$\oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{A}$

Elektrische Gleichströme

Strom $I = \frac{dQ}{dt}$

ohmsches Gesetz $U = RI$ / $\boxed{\vec{E}\sigma = \vec{j} \text{ mit } \sigma = \frac{1}{\rho}}$ ← spez. Leitfähigkeit

ohmsches Gesetz in Differentialform

Stromdichte $\vec{j}$: $dI = \vec{j} \cdot d\vec{A} \Rightarrow I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$

$\boxed{j = \frac{I}{A}}$ $\vec{j} = nq_e\vec{v}_D$ $\frac{n}{V} \Rightarrow$ Anzahldichte

Kirchhoff: $\sum I_k = 0$; $\sum U_k = 0$ ⇒ Vorsicht mit Innenwiderstand

Leistung $P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$ für Widerstände (→ für Ohm)

$P = UI$ für Spannungsquelle

Leistung (mechan.) $P = Fv$

Widerstand (Leiter) $R = \rho\frac{L}{A}$ (spez. Widerstand)

Beim Einschalten:
- L ($R \to \infty$), Strom steigt langsam an ↳ kein Strom zu Beginn
- C ($R \to 0$), Spannung steigt langsam an ↳ hoher Strom zu Beginn

Beim Ausschalten:
- L, hohe Spannung da Spule versucht den Stromfluss aufrechtzuerhalten
- C, exponentielle Abnahme der Spannung und des Stroms, da C seine gespeicherte Energie abgibt

Reihenschaltung:

$R = R_1 + R_2 + R_3$

$I = I_1 = I_2 = I_3$

$U = U_1 + U_2 + U_3$

$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$

$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$

Parallelschaltung:

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

$I = I_1 + I_2 + I_3$

$U = U_1 = U_2 = U_3$

$C = C_1 + C_2 + C_3$

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

Induktion

magnetischer Fluss $\Phi_m = \oint \vec{B}\, d\vec{A}$

Induktionsspannung $U_{ind} = -\dot{\Phi}_m$

Induktivität $\Phi_m = LI$ **Kraft in L** $\vec{F}_L = I(\vec{l} \times \vec{B})$

Induktionsgesetz $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{A}$

Leiterschleife $U_{ind} = Blv$

rot. Leiterschleife $\Phi = BA\cos(\omega t)$

Selbstinduktion $U_{ind} = -\dot{\Phi}_m = -L\dot{I}$

Lenzsche Regel
Induktionsstrom wirkt der Ursache seiner Entstehung entgegen.

Induktivitäten

Spule $L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{L} A$ [H] (A: Querschnitt, L: Länge Spule)

Drahtschleife $L = \mu_0 R \ln\left(\frac{R}{r}\right)$

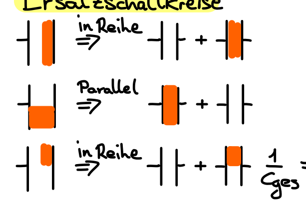
Doppelleitung $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right)$

Koaxialkabel $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$

Transformator

$U_2 = \frac{N_2}{N_1}$; $I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1$

Ersatzschaltkreise



$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}$

Schaltungen

Widerstände im Wechselstromkreis

$Z_R = R$, $\varphi = 0°$
$Z_L = \omega L$, $\varphi = -90°$
$Z_C = \frac{1}{\omega C}$, $\varphi = 90°$

$\hat{Z}_R = R$
$\hat{Z}_L = i\omega L$
$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$

$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$

$I(t) = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$

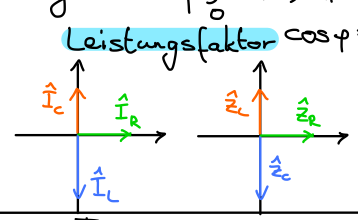
mittlere Leistung $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T U_1(t) I_1(t)\, dt$

$U = \hat{Z} \cdot \hat{I}$

$U(t) = \hat{U} e^{i\omega t}$

$I(t) = \hat{I} e^{i\omega t}$

Leistungsfaktor $\cos\varphi = \frac{P}{S}$



RC-Glied $W_{el}(t) = \frac{1}{2}CU(t)^2$

LR-Glied $W_m(t) = \frac{1}{2}LI(t)^2$

Kondensator $W_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED$ $U = Ed$

Spule $W_m = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}BH$ $NI = Hl$

⇒ **em. Feld** $W_{elm} = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H})$

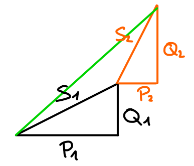
Wirkleistung $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$

Blindleistung $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$

Scheinleistung $S = U_{eff} \cdot I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$\boxed{U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0}$

Gesamtleistungsfak. $\cos\varphi = \frac{P_{ges}}{S_{ges}} = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{(P_1+P_2)^2 + (Q_1+Q_2)^2}}$



↳ $I = \frac{S_{ges}}{U}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ⇒ Re(I) = Wirk ; Im(I) = Blind

Schein = $\sqrt{Re^2 + Im^2}$

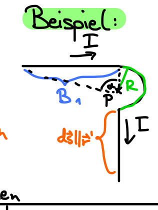
Feldenergie

$P(t) = I(t) \cdot U(t)$ $W_{el}(t) = \int_0^t P(t)\, dt$

Biot-Savart

1) rechte-Faust-Regel (für Richtung von $\vec{B}$)
2) wähle $\vec{r} = (0,0,0)$
3) $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{r} \times (-\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3}$ ⇒ Leitungen finden für die $d\vec{s} \parallel \vec{r}'$
4) jeweils Parametrisieren, ableiten + ausrechnen

Beispiel:



B_1: $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\tan\alpha \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$, $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \Rightarrow d\vec{r} = \begin{pmatrix} R + R\tan^2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\tan\alpha = \frac{x}{R}$

$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\begin{pmatrix} R\tan\alpha \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R(1+\tan^2\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + R^2\tan^2\alpha}^3}\, d\alpha$ ⇒ gerade Strecke: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

B_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi \Rightarrow d\vec{r} = \begin{pmatrix} R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$

$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{-\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi} \left(\begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{R^3}\, d\varphi$

⇒ Halbkreis: $B = \frac{\mu_0 I}{4R}$

Viertelkreis: $B = \frac{\mu_0 I}{8R}$

Komplexe Impedanzen

1) Z_{ges} mit Schaltregeln aufstellen
2) Im und Re trennen
3) $\tan\phi = \frac{Im}{Re}$ (Phasenverschiebung zw. U und I)
4) $|Z| = \sqrt{Im^2 + Re^2}$

Paramagnetismus: permanente magn. Momente, Orientierung zufällig, Feld nach Ausrichtung immernoch schwach
↳ $V = -\mu B$
$F = -\nabla V = \mu\nabla B$

Diamagnetismus: magn. Momente aller e^- der Atome heben einander auf, Lenzsche Regel, wenn äußeres Feld anliegt

Ferromagnetismus: Weißsche Bezirke, Permanentmagneten ⇒ starkes Feld

Magnetostatik

Lorentzkraft $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) = I(\vec{l} \times \vec{B})$ (im stromdurchfloss. Leiter)

mag. Fluss $\Phi_m = \int \vec{B}\, d\vec{A}$

B-Feld (stromdurchfloss. Leiter) $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}(\vec{e} \times \vec{r})$

Grundgleichungen Magnetostatik $\oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0$ / $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

ab jetzt: Zirkulation des B-Feldes

Ampèresches Durchflutungsgesetz $\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \sum I_k$ ($= \mu_0\int \vec{j}\, d\vec{A}$) / $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

B-Feld in langer Spule $B = \mu_0 I n$ mit $n = \frac{N}{L}$

Biot-Savart $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ (von Ursprung zu Punkt; von Punkt zu Leiter)

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$

Feldlinien: Nord → Süd außen
Süd → Nord innen

Feldlinien: von + nach −

Wellen

Wellengleichung

Phasengeschwindigkeit

1D $\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$

3D $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \Delta\psi = v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$

Wellenpaket

$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk$

Maxwell (Vakuum) $\Rightarrow \rho = 0; \vec{j} = 0$

$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0, \operatorname{div}\vec{B} = 0, \operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \operatorname{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \dot{\vec{E}}}$

Harmonische, ebene Welle

$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$ $\quad v_{Ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \lambda = \frac{2\pi}{k},\ v_{Ph} = \frac{\omega}{k};\ \omega = \frac{2\pi}{T};\ v_g = \frac{d\omega}{dk}}$

elektromag. Wellen

$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}\Delta\vec{E}$ $\quad c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$ $\quad B_0 = \frac{E_0}{c}$

$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}\Delta\vec{B}$

em. Wellen im Vakuum:
$\vec{E} \perp \vec{B}$; $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$
$\vec{E}, \vec{B}$ in Phase ; $c = \frac{\omega}{k}$
$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$

Wellengleichung, Sch.:
$B = B_0\cos(\omega t - kz) = B_0 \cos(y)$
$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -k\frac{\partial B}{\partial y}$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-k\frac{\partial B}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}k^2$
$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \omega\frac{\partial B}{\partial y}$

Wellenfkt. ablesen

$y(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi}{2x_0}\cdot x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{t_0}\cdot t\right)$ ($\frac{\pi}{2x_0}$: k, $\frac{4\pi}{t_0}$: ω)

allgemein gilt:

$\omega = 2\pi f$
$\lambda = \frac{c}{\nu}$; $f = \frac{1}{T}$

transversal: Ausbreitung senkrecht
Longitudinal: Ausbreitung entlang

Ansätze:
$\lambda = ?$ $\Rightarrow x \mapsto (x+\lambda) \Rightarrow +2\pi$
$T = ?$ $\Rightarrow t \mapsto (t+T) \Rightarrow +2\pi$ $\quad \Rightarrow y = n\pi$
Knoten: $y(x,t) = 0\ \forall t \Rightarrow \sin(y) = 0$
Bäuche: maximale Auslenkung $|\sin(y)| = 1$
$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi$

Energietransport in em. Wellen $\quad \langle w_{en}\rangle = \frac{\Delta E_{en}}{V}$

im Vakuum: $w_{en} = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E_0^2$

Mittel, ebene Welle $\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}$

Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{E}\times\vec{H}$ $\quad E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}}$
$S = w_{en}\, c$

Intensität $I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c$ $\quad \boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$

zeitlich mitteln: $\frac{1}{T}\int_0^T \dots dt$
$\bar{P} = \frac{1}{T}\int I\, dt \cdot A = \bar{I}A = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \cdot 4\pi r^2$ (Kugel)

Hertzscher Dipol
Intensität $I \sim \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$ / $I = D\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$

$P_{ges} = \iint I_{em}(r,\vartheta)\, dA$ mit $dA = r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

Eigenfrequenz $f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Nahfeld $E \sim \frac{1}{r^3}, B \sim \frac{1}{r^2}, \varphi = 90°$

Fernfeld $E \sim \frac{1}{r}, B \sim \frac{1}{r}, \vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{k}$

E-Feld / Lorentzkraft

Zyklotron
$\vec{F}_L = \vec{F}_{Zp}$ für Abstand.
$\Delta E_{kin} = 2W = 2qU_{HF}$

Zylindrischer Kondensator
1) $\oint\vec{E}\,d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\quad F = -\frac{\partial E}{\partial a}$
2) $U = \int\vec{E}\,d\vec{s}$ $\quad C = \frac{Q}{U}$
$U = \frac{Q}{2\pi l\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

Massenspektrometer
im E-Feld: $W = U_q = E_{kin}$
im B-Feld: $F_L = F_{Zp}$

Hall-Effekt
$F_{el} = F_L$, $U = E_d$ oder: $U = \int E\,dr$

E-Feld, Flächenladung
$dA = 2\pi r\,dr$
$\cos\alpha = \frac{dF_y}{dF_c}$ $\Rightarrow F_y = ?$
nur $F_{c\perp}$!

Atmosphäre
$\oint\vec{E}\,d\vec{A} = (E_1 - E_2)A = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
für "flache Erde" (lineare Abnahme), homogen

E-Dipol
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right]$
$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{x^3}\vec{e}_x$ $\sim \frac{1}{r^3}$ Abh.

Drahtring
$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}'-\vec{r}|}dV$
$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{|\vec{r}'-\vec{r}|}ds$
$\vec{s} = R\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$
$ds = \left|\frac{d\vec{s}}{d\alpha}\right|d\alpha = \sqrt{(-R\sin\alpha)^2 + (R\cos\alpha)^2}$
$ds = R\,d\alpha$ $\quad |\vec{r}' - \vec{r}| = \sqrt{z^2 + R^2}$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}R\,d\alpha$
$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$
$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = -\frac{d}{dz}\varphi$

Quadratische Antenne
1) B ist in z-Richtung linear polarisiert
2) $\vec{B} = B_0\sin(kx - \omega t)\,\vec{e}_z$
$\Phi = \int_0^a dx\int_0^a dy\, B_0\sin(kx - \omega t)$

Kugelkondensator
$C = \frac{Q}{U}$, $U = -\int_a^b E\,ds$
$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{r_i - r_a}{r_a r_i}\right)$

Rotierende Scheibe
$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = q(\vec{r}\times\vec{\omega})\times\vec{B}$
$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = (\vec{r}\times\vec{\omega})\times\vec{B}$
$U = -\int\vec{E}\,d\vec{s}$

Homogen geladene Platte (Gaußsche Dose)

$\oint\vec{E}\,d\vec{A}$
$= \int\vec{E}\,d\vec{A} + \int\vec{E}\,d\vec{A} + \int\vec{E}\,d\vec{A}$ (Mantel, Deckel, Boden)
$= 0 \quad + 2\pi r^2 + 0$
$= \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi r^2\rho}{\varepsilon_0}$ " $\vec{E}\perp\vec{A}$

Magnetfelder

Permanentmagnetring
$H_m(2\pi R - d) + H_L d = I_{frei}$ $= 0$
$B_m = \mu_0(H_m + M)$
$B_L = \mu_0 H_L$ $\quad B_m^\perp = B_L^\perp$

Koaxialkabel
$\oint B\,d\vec{s} = I\mu_0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
$\Phi = \int_a^b dr\int_0^l dz\, B$

Optik

Laserpointer
$\vec{p}_{St} = \frac{1}{c^2}\langle\vec{S}\rangle = \langle\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})\rangle$
$|\vec{p}_{St}| = |\langle\varepsilon_0 \cdot E\cdot B\rangle| = \frac{|\langle\vec{S}\rangle|}{c^2}$
$= \frac{I}{c^2}$ ← Intensität
$p_{St} = c\,|\vec{p}_{St}|$

Ringtransformator
$\Phi_{Kern} = \frac{\Phi_1}{N_1} = \frac{\Phi_2}{N_2}$
$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$
$U(t) = L\dot{I} \Rightarrow I = \int dt\,\frac{U(t)}{L}$

belasteter Transformator
I) $U_1 = L_1\dot{I}_1 + M_{12}\dot{I}_2$
II) $0 = RI_2 + L_2\dot{I}_2 + M_{12}\dot{I}_1$

Kondensatoraufgaben
1) U angeschlossen $\Rightarrow U_0 = U_1$
2) U getrennt $\Rightarrow Q_0 = Q_1$
C_{ges} berechnen
$U_0 = \frac{Q}{C_{ges}}$, $U_1 = \frac{Q}{C_{1,ges}}$
$E = \frac{1}{2}CU^2$

Stab im Magnetfeld
$\Phi = Bd\int v\,dt$
$U_{ind} = -Bdv$, $I = \frac{U_{ind}}{R} = -\frac{Bdv}{R}$
$F_L = IdB$
$F_g = -F_L \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2d^2}$

$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}\right)$ $\Rightarrow$ Kugel

Induktion

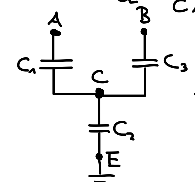
bew. Leiterschleife
$\Phi_m = BdA = B\int_0^t v\,dt' = Blvt$
$U_{ind} = -\dot{\Phi}_m = {}^{\circ}Blv$
$F_{ind} = m\ddot{x}$

Drehende Leiterschleife
1) $A = A_0\cos(\omega t)$
2) $\Phi = \int\vec{B}\,d\vec{A} \Rightarrow \Phi = B\cos(\omega t)\cdot a\cdot b\cdot N$
3) $U_{ind} = -\dot{\Phi}$

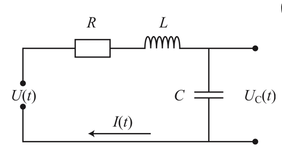
Betatron
$\Phi_m = \bar{B}\pi r^2$
$F = qE = q\frac{U_{ind}}{2\pi r} = -\frac{q}{2\pi r}\dot{\Phi}_m$
$p = \int F\,dt$ $\quad N 2\pi r = \int v\,dt$

Schaltung mit Spule ⇒ Wärme
LR-Kreis: $I(t) = \frac{U_0}{R_1}e^{-\frac{R_1}{L}t}$
$U = IR_1$
$Q = \int_0^\infty I\,dt'$ $\quad Q_{wärme} = E_{el} = \frac{1}{2}QU$
$Q = \frac{U_0^2 L}{2R_1^2}e^{-2\frac{R_1}{L}t}$

Kondensatornetzwerk
I) $U_{AE} = U_{AC} + U_{CE}$
II) $U_{BE} = U_{BC} + U_{CE}$ } Maschenregeln
III) $U_{CE} = \frac{Q_C}{C_1} = \frac{Q_A + Q_B}{C_1}$
gleiche Ladung!
parallel: $Q_4 = Q_2 + Q_3$

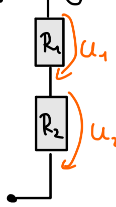


RLC-Serienschaltung



$U(t) = IR + L\dot{I} + \frac{Q}{C}$
$\dot{U}(t) = \dot{I}R + L\ddot{I} + \frac{I}{C}$

Spannungsteiler



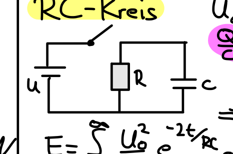
Zündspule

$U_2 = \frac{U}{R_{ges}}\cdot R_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}$
$R_{ges} = R_1 + R_2$
$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2}$
$U_2 = I\cdot R_2$

Schaltungen

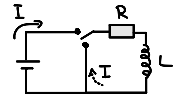
Anfangsb. $I(0) = -\frac{U_0}{R}$

RC-Kreis



$U_c = \frac{Q}{C}$
$\frac{Q}{C} + IR = U_0$
$\frac{I}{C} + \dot{I}R = 0$
$\Rightarrow I(t) = e^{-t/RC}$
$E = \int_0^\infty\frac{U_0^2}{R}e^{-2t/RC}dt = \int dt\,P$
Ausschalten: $IR + Q/C = 0$

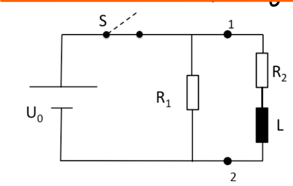
LR-Kreis



Einschalten:
$U_{ind} = -L\dot{I}$
Maschenregel:
$U_0 + U_{ind} = U_R$ $\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}$
homogen Lsg. $I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\cdot C$
inh.: für $t\to\infty$: $U_0 = R\cdot I \Rightarrow I = \frac{U_0}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}\cdot C$
Ausschalten: $\dot{I} + \frac{R}{L}I = 0$ $\quad I(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{U_0}{R}$

Zündspule (LR-Kreis)
$U_{ind} = I(R_1 + R_2)$
$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R_2}e^{-t/L(R_1+R_2)}$

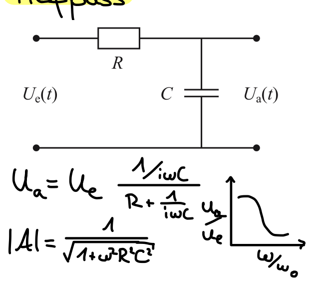
L erhält Strom aufrecht, nicht Spannung



RLC-Serienschaltung
1) DGL: $U(t) = U_C + U_L + U_R$
$U(t) = \frac{Q}{C} + L\dot{I} + RI$
$\dot{U} = \frac{I}{C} + L\ddot{I} + R\dot{I}$
2) Ansatz: $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$
$I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$
3) $|I_0| = |U_0|\left|\frac{1}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}\right||e^{i\phi}|$ ($|e^{i\phi}| = 1$)
4) $R + i(L\omega - \frac{1}{\omega C}) = \frac{U_0}{I_0}(\cos\phi + i\sin\phi)$
5) $\tan\phi = \frac{Im}{Re}$

Schaltkreise
$U = U_1 + U_2 \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{ges}}$

Tiefpass

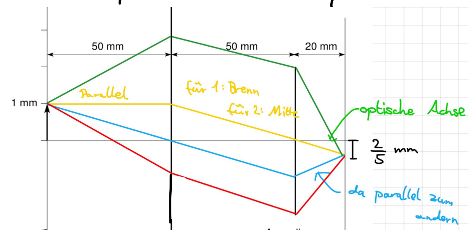


$U_a = U_e\frac{1/i\omega C}{R + \frac{1}{i\omega C}}$
$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}}$
$\tan\Phi = -R\omega C$
$U_a = |A|\,e^{i\phi}U_e$

Optik

Spalt Minima: $m\lambda = a\sin\vartheta$ (m = 1,2,3,...)
Doppelspalt $\lambda \cdot L = g a_x$
Maxima: $d\sin\vartheta = m\lambda$
Minima: $d\sin\vartheta = (m + \frac{1}{2})\lambda$

Gitter Maxima: $g\sin\vartheta = n\lambda$
$\Rightarrow s = 2\cdot L\cdot\sin\vartheta$
Auflösungsvermögen: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq n\cdot m$ (Anzahl Spalte, Ordnung)
Brennpkt.strahl ⇒ Parallelstrahl
Parallelstrahl ⇒ Brennpkt.strahl
Mittelpkt.strahl ⇒ Mittelpkt.strahl



Intensitätsverteilung
Einzelspalt: $I = I_0\frac{\sin^2(\frac{k a}{2}\sin\vartheta)}{(\frac{ka}{2})^2\sin^2\vartheta}$ $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Doppelspalt: $I(\vartheta) = 4I_0\cos^2(k\frac{d}{2})\cdot\left(\frac{\sin(\frac{k a}{2})}{\frac{ka}{2}}\right)^2$
$k = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta$
Gitter $I(\vartheta) \sim \left(\frac{\sin(\frac{mkd}{2})}{\sin(\frac{kd}{2})}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin(\frac{ka}{2})}{\frac{ka}{2}}\right)^2$

Integrale

$\int\cos^2 x = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$
$\int\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin^2$
$\tan'\varphi = 1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

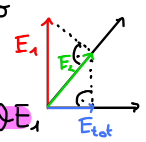
Brennweite $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Rightarrow f = \frac{gb}{b+g}$

kombinierte Brennweite
$\frac{1}{f_k} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$ (d: Abstand der Linsen)

Brechungsgesetz
$n_1\sin\vartheta_1 = n_2\sin\vartheta_2$

Linsen $\frac{b}{g} = \frac{B}{G}$

Polarisation
$I_2 = I_1\cos^2\vartheta$
bzw. $E_2 = \cos\vartheta E_1$
$I \propto E^2$



c im Medium $c_{med} = \frac{c}{n}$

Fermatsches Prinzip ↳ Lichtlaufzeit minimal
$\frac{\partial T}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0$

passendes E-Feld herleiten
1) Maxwell: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
2) $\operatorname{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix}\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\end{pmatrix} = \frac{\partial B_x}{\partial z}\vec{e}_y$ ↳ z.B. für $\vec{B} = \vec{e}_x\cdot B_0\cos(\omega t - kz)$
3) $\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial z}c^2 = \frac{\partial E_y}{\partial t}$
4) $E_y = \int dt\, kB_0\sin(\omega t - kz)c^2$

komplexe Zahlen $-i = \frac{1}{i}$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$\tan\phi = \frac{Im}{Re}$ $\quad z = |z|\,e^{i\phi}$ mit $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

Relativitätstheorie
Längenkontraktion $L = \frac{L_{eigen}}{\gamma}$ $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad \beta = \frac{v}{c}$

Zeitdilatation $t' = t\gamma$

Fresnel-Formeln
$R_\perp(\alpha,\beta) = \frac{I_{\perp,refl}}{I_{\perp,ein}} = \left(\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2$
$R_\parallel(\alpha,\beta) = \frac{I_{\parallel,refl}}{I_{\parallel,ein}} = \left(\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan(\alpha+\beta)}\right)^2$
$T_\perp(\alpha,\beta) = \frac{I_{\perp,trans}}{I_{\perp,ein}} = \left(\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2$
$T_\parallel(\alpha,\beta) = \frac{I_{\parallel,trans}}{I_{\parallel,ein}} = \left(\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\right)^2$

Wellengleichungen herleiten
B
1) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
2) $\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$
3) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{B})) = \varepsilon_0\mu_0\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E}$
$= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$
4) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{B})) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \Delta\vec{B}$ ($\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$)
$= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$
$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{B} = \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$

$\boxed{\text{Wärme: } E = \int dt\,P}$

$\boxed{\begin{matrix}\cos(-x) = \cos(x)\\ \sin(-x) = -\sin(x)\end{matrix}}$

$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

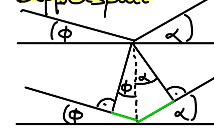
Mathe

Additionstheoreme
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(y)\sin(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$

BAC-CAB:
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\boxed{\begin{matrix}f(x) = u\cdot v'\\ F(x) = u\cdot v - \int u'v\end{matrix}}$

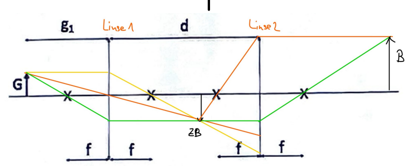
Doppelspalt



$d(\sin\phi + \sin\alpha)$

Einheiten
$m \xleftarrow{10^2} cm \xleftarrow{10^1} mm$
$\frac{m}{s} \xleftarrow{:3{,}6} \frac{km}{h}$
$m^2 \xleftarrow{10^4} cm^2 \xleftarrow{10^2} mm^2$
$l \xleftarrow{10^3} m^3 \xleftarrow{10^6} cm^3 \xleftarrow{10^3} mm^3$
$\frac{kg}{m^3} \xleftarrow{10^3} \frac{g}{cm^3}$

Geometrie
Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$A = 4\pi r^2$
Q_{innen}, hom. Kugel
$\Rightarrow Q_{innen} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$
Mechanik
$F = p\cdot A$, $F_L = \frac{mv^2}{r}$



$[M] = \frac{A}{m}$
$[P] = W$ oder VA
$[C] = F$
$[E] = \frac{V}{m}$
$[D] = \frac{C}{m^2}$
$[H] = \frac{A}{m}$
$[B] = T$
$[Q] = C$