Fourier-Transform

Def. $\mathcal{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$

time shift $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}=\mathcal{F}(\omega)\,e^{-i\omega t_0}$

time scale $\mathcal{F}\{f(at)\}=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

convolution $\mathcal{F}\{f(t)*g(t)\}=\mathcal{F}(\omega)G(\omega)$

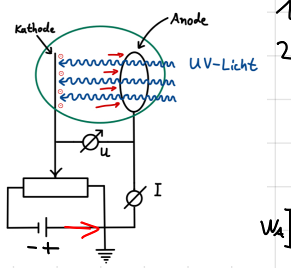
differentation $\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}=-i\omega F(\omega)$

symmetry $\mathcal{F}(f(-t))=F(-\omega)$

Teilchencharakter

$E_{kin}=h\nu-W_A$ $\quad c=\lambda\nu$, $E=h\nu$

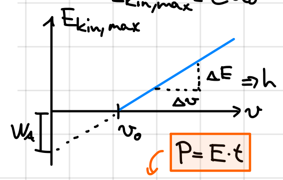
Photoeffekt



1) $I_{Ph}\sim I$

2) Spannung $-U_0$

↳ $E_{kin\,max}=eU_0$



$P=E\cdot t$

$N=\frac{P}{E}$

kl. Physik: 1) E_{kin} sollte $\sim I$
2) E_{kin} sollte unabh. von ν
3) kein Zeitverzug zwischen Einstrahlung und Emission gemessen

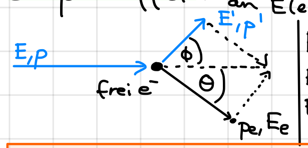
1) $W_A=h\nu-E_{kin}=h\nu-eU$ $\quad$ 4) $I=I_0e^{-\mu x}$

2) kleinste ν: $W_A=h\nu$

3) $N=\frac{P\cdot 1s}{E_{Ph}}\Rightarrow I=eN$ $\quad \frac{x}{\ln(10)}=\frac{B}{m}$

Comptoneffekt

elast. Streuung von Photonen an Elektronen



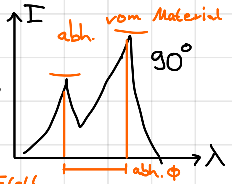
$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$

$E=mc^2$

Energie & Impulserhalt.

$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\lambda_c(1-\cos\phi)$ $\quad E'=\frac{hc}{\lambda+\Delta\lambda}$

$\lambda_c=\frac{h}{m_ec}=2{,}4\,pm$



1) $\Delta\lambda$ ist unabh. von λ

2) $\Delta\lambda_{max}=2\lambda_c$, $\phi=180°$

3) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\lambda_c}{\lambda}(1-\cos\phi)$

$E+mc^2=E'+mc^2+E_{kin}$ ← Elektron $\quad E_{kin}=E_{in}-E_{aus}$

Wärmestrahlung

spektrale Energiedichte ist auf Volumen normiert

Rayleigh-Jeans: $E(\lambda,T)=\frac{c}{8\pi}u(\lambda,T)$ $\quad\nu$ klein

mit $u(\lambda,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu$

Wien: $u(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)d\nu$ $\quad\nu$ groß

Planck: $I(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_BT}\right)-1}$

$\frac{c}{4\pi}$ $\quad u(\lambda,T)\,d\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_BT}\right)-1}d\lambda$

maximale Emission

Wien-Verschiebung $\lambda_{max}\cdot T=2{,}897\cdot10^{-3}\,m\cdot K$

Stefan-Boltzmann $P=\sigma T^4$ $\quad\left[\frac{W}{m^2}\right]$ Leistung

$P=\sigma AT^4$ $[W]$ $\quad\sigma=\frac{2\pi^5k_B^4}{15h^3c^2}=5{,}67\cdot10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}$

Gravitationswirkung

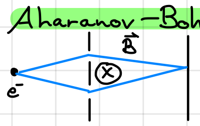
$\Delta E_{pot}=G\frac{Mh\nu}{Rc^2}$

$h\nu'=h\nu\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right)$ $\quad\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\nu'-\nu}{\nu}=-\frac{GM}{Rc^2}$

Gravitationsrotverschiebung

$m=\frac{h\nu}{c^2}$ $\quad E=h\nu$ $\quad p=\frac{h\nu}{c}=\hbar k$ $\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$

Aharanov-Bohm-Effekt



$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$, $\hbar=\frac{h}{2\pi}$

Schrödinger-Gleichung

zeitabhängig

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=\hat{H}\psi(\vec{r},t)$

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t)=\left(V-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\psi(\vec{r},t)$

$=0$ wenn potentialfrei

in 1D: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$

Separationsansatz: $\psi(x,t)=\psi(x)\phi(t)$

zeitabh.: $\frac{d}{dt}\phi(t)+\frac{iE}{\hbar}\phi(t)=0\Rightarrow\phi(t)=e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$

stationär: $\frac{2M}{\hbar^2}(E-V)\phi+\Delta\phi=0$

allg. Lsg. für $E<V(x)$ und $V(x)=$ const:

$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi(x)=0$

$\Rightarrow\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=k^2\psi(x)$

$\Rightarrow\psi(x)=Ae^{-kx}+Be^{kx}$

Normierungsbedingung $\iiint|\psi(\vec{r},t)|^2d^3\vec{r}=1$

für stationär: $\langle\psi(x)|\psi(x)\rangle=1$

$\hat{H}\phi(\vec{r})=E\phi(\vec{r})$ $\quad\psi(\vec{r},t)=\sum_n a_n\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_nt\right)\phi_n(\vec{r})$

Operatoren

Observable sind selbstadjungiert → für Observable muss reell sein

Eigenwertgleichung $\hat{A}x=ax$

Physikalische Größe	Operator
Ortsvektor $\vec{r}$	$\vec{r}$
pot. Energie	$\hat{E}_{pot}=V(\vec{r})$
kin. Energie	$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$
Gesamtenergie	$\hat{H}=\hat{E}_{pot}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta=\frac{\hat{p}^2}{2M}+V$
Impuls $\vec{p}$	$\hat{\vec{p}}=-i\hbar\nabla$ / $\hat{\vec{p}}^2=-\hbar^2\Delta$
Drehimpuls $\vec{L}$	$\hat{\vec{L}}=-i\hbar(\vec{r}\times\nabla)$
z-Komponente Drehimpuls	$\hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad=\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

Wellencharakter

De-Broglie $\quad\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}$ $\quad\hbar=\frac{h}{2\pi}$

$E=h\nu\Rightarrow\nu=\frac{mc^2}{h}$ $\quad$ rel. Masse $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$p=\frac{E}{c}=\hbar k$ $\quad\Rightarrow$ Phasengeschw. darf größer als c sein $\quad E_k=(\gamma-1)m_0c^2$

$\omega=\frac{E}{\hbar}$

$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$ $\quad\Rightarrow$ Informationsübertragung mit V_{Gr}

rel. $p=\frac{\sqrt{2E_km_0c^2+E_k^2}}{c}$ $\quad$ nicht rel. $p=\sqrt{2m_0E_k}$

Beugung von Elektronen am Nickelkristall

⇒ Nachweis De-Broglie

Bragg-Streuung $2a\sin\phi=n\lambda$

Wellen

$V_{Gr}=\frac{d\omega}{dk}$ $\quad\omega=\frac{E}{\hbar}$, $k=\frac{p}{\hbar}$

Gruppengeschw. = Teilchengeschw.

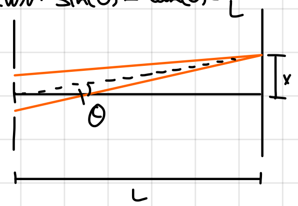
ebene Welle: $\psi(x,t)=Ae\exp(i(kx-\omega t))$

Wellenpaket: $\psi(x,t)=\int A(k)\exp(i(kx-\omega t))dk$

Doppelspaltexperimente

$\Delta s=d\sin(\theta)$ $\quad\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta s=\frac{2\pi d\sin(\theta)}{\lambda}$

KWN: $\sin(\theta)\approx\tan(\theta)=\frac{x}{L}$



Heisenbergsche Unschärferelation

$\Delta x\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$

Operatoren weiter

$\psi(x,t)=\sum_n a_n\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_nt\right)\phi_n(x)$ $\quad\psi(x,t=0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)$

$\int\psi_n\psi_m^*d^3\vec{r}=\delta_{nm}$

Impuls-Ort-Fourier

$\vec{p}=\hbar\vec{k}$ $\quad\phi(\vec{p})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\int d^3\vec{r}\,\psi(\vec{r})e^{-\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}$

$\psi(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\int d^3\vec{p}\,\phi(p)e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}$

$|b_j\rangle=\sum_{k=1}^{n}c_{jk}|a_k\rangle$

$\Rightarrow\langle a_m|b_j\rangle=c_{jm}$

komplex konjugiert

Erwartungswert $\langle\hat{S}_x\rangle=\langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle$ $\quad\langle n|\alpha\rangle\,\langle n|$ $\;=c_n$

$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{x}\psi\,dx$ / $\langle p_x\rangle=\int\phi^*(p)p_x\phi(p)dp$

für unnormiert: $\langle B(t)\rangle=\frac{\int\psi^*B\psi\,d^3\vec{r}}{\int\psi^*\psi\,d^3\vec{r}}$

1) Kommutator $[A,B]=AB-BA$

↳ wenn EW von A,B gleichzeitig scharf messbar ⇒ $[A,B]=0$

2) hermitesch: $A^+=A$ ⇒ hermitesche Operatoren haben reelle EW

3) Eigenfunktionen von Observablen sind orthonormal

4) EF von Observablen sind vollständig

Bra-Ket Notation

$|\psi\rangle^+=\langle\psi|$

$\langle\varphi|\psi\rangle=\int\varphi^*\psi\,d^3r$ $\quad$ oder für orthonormal $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$

Tensorprodukt

$|\varphi\rangle\otimes\langle\psi|=|\varphi\rangle\langle\psi|=\begin{bmatrix}\varphi_1\psi_1^* & \varphi_1\psi_2^* & \dots\\ \varphi_2\psi_1^* & \dots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

wenn $|\psi\rangle$ normiert: $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ Projektor

$|\psi\rangle=\mathbb{1}|\psi\rangle=\int|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle d^3\vec{r}$

Matrixoperatoren

1) $M|\varphi_i\rangle=\varphi_i|\varphi_i\rangle$, 2) gemeinsame EV, wenn $[M_1,M_2]=0$

3) EV hermitescher Matrizen sind orthonormal $\quad\Rightarrow\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$

4) Vollständigkeitsrelation $|v\rangle=\sum_i g_i|\varphi_i\rangle$

Drehimpuls

$\hat{\vec{L}}=\vec{r}\times\vec{p}$ / $\hat{\vec{L}}=\vec{r}\times(-i\hbar\nabla)$ $\quad\hat{\vec{J}}^2=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2$

Kommutatoren $\quad\Rightarrow$ einzelne Komponenten kommutieren nicht

$[J_x,J_y]=i\hbar J_z$

$[J_y,J_z]=i\hbar J_x$

$[J_z,J_x]=i\hbar J_y$

$\Rightarrow\hat{\vec{L}}\times\hat{\vec{L}}=i\hbar\hat{\vec{L}}$

$L_zY_\ell^m(\varphi,\vartheta)=m\hbar\,Y_\ell^m(\varphi,\vartheta)$

$\hat{\vec{L}}^2Y_\ell^m(\varphi,\vartheta)=\ell(\ell+1)\hbar^2Y_\ell^m(\varphi,\vartheta)$

allgemeiner Drehimpuls

$[J_i,J_j]=i\hbar\sum_k\varepsilon_{ijk}J_k$ $\quad[\hat{A},\hat{A}]=0$

$[\hat{A},\hat{B}]=-[\hat{B},\hat{A}]$

$[\hat{J}^2,J_i]=0$ $\quad[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$

$[J_+,J_-]=2J_z$

$[J_z,J_-]=-J_-$ $\quad[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ $\quad\hat{N}=\hat{a}^+\hat{a}$ $\quad\hat{N}|n\rangle=n$

$[J_z,J_+]=J_+$ $\quad\hat{a}\hat{a}^+=1+\hat{N}$

$[\hat{J}^2,J_\pm]=0$ $\quad J_z|jm\rangle=m\hbar|jm\rangle$

$J_-J_+=\hat{J}^2-J_z(J_z+1)$ $\quad\hat{J}^2|jm\rangle=\hbar^2j(j+1)|jm\rangle$ $\quad[\hat{a},\hat{a}^+]=1$

$J_+J_-=\hat{J}^2-J_z(J_z-1)$

Spin-Operatoren

$S_x^{(s)}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad S_+|\frac12,\frac12\rangle=0$ $\quad\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=|s,m_s\rangle=|\frac12,\frac12\rangle$

$S_y^{(s)}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ $\quad S_+|\frac12,-\frac12\rangle=\hbar|\frac12,\frac12\rangle$ $\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=|s,m_s\rangle=|\frac12,-\frac12\rangle$

$S_z^{(s)}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad S_-|\frac12,\frac12\rangle=\hbar|\frac12,-\frac12\rangle$

$S_-|\frac12,-\frac12\rangle=0$ $\quad S_\pm^{(s)}=S_x^{(s)}\pm iS_y^{(s)}$

$\hat{S}_x|\uparrow\rangle=\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$, $\hat{S}_x|\downarrow\rangle=\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $\quad\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\hat{S}_y|\uparrow\rangle=i\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$, $\hat{S}_y|\downarrow\rangle=-i\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $\quad\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$

$\hat{S}_z|\uparrow\rangle=\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$, $\hat{S}_z|\downarrow\rangle=-\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $\quad\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$|\!\uparrow\rangle_x=\frac{1}{\sqrt2}(|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle)$

$\langle\ell',m'|\hat{\vec{L}}^2|\ell,m\rangle=\hbar^2\ell(\ell+1)\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$

$\langle\ell',m'|\hat{L}_+|\ell,m\rangle=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}\,\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m+1,m'}$

$\langle\ell',m'|\hat{L}_-|\ell,m\rangle=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m-1)}\,\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m-1,m'}$

$\langle\ell',m'|\hat{L}_z|\ell,m\rangle=\hbar m\,\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$

$\langle n'|\hat{a}^+|n\rangle=\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}$ $\quad\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^+)$

$\langle n'|\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}$ $\quad\hat{p}=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^+-\hat{a})$

$|\uparrow\rangle_z=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},+\frac{\hbar}{2}$; $|\downarrow\rangle_z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},-\frac{\hbar}{2}$, $|\uparrow\rangle_x=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},+\frac{\hbar}{2}$, $|\downarrow\rangle_x=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},-\frac{\hbar}{2}$

$|\uparrow\rangle_y=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},+\frac{\hbar}{2}$, $|\downarrow\rangle_y=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},-\frac{\hbar}{2}$

Vernichtungsoperator $\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x}+i\hat{p})$

Erzeugungsoperator $\hat{a}^+=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega\hat{x}-i\hat{p})=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega x-\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$

Unschärfe eines Operators

$\Delta\xi=\sqrt{\langle\xi^2\rangle-\langle\xi\rangle^2}$

$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x)dx$ $\quad Var(E)=\langle\hat{H}^2\rangle-\langle\hat{H}\rangle^2$

Mathe

°C → K: $+273{,}15$

Näherung: $\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}$ $\quad x\ll1$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

Komplexe Zahlen

$|z|^2=z^*z=(a-ib)(a+ib)=a^2+b^2$

$|\psi(x,t)|^2=\psi^*(x,t)\psi(x,t)$

hermitescher Operator $\hat{N}=\hat{N}^+$

Hermite-Polynome

n	$H_n(\xi)$	E_n
0	1	$\frac12\hbar\omega$
1	2ξ	$\frac32\hbar\omega$
2	$4\xi^2-2$	$\frac52\hbar\omega$
3	$8\xi^3-12\xi$	$\frac72\hbar\omega$

Gauß-Integral

$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ax^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\quad\Rightarrow$ Substitution: $u^2=ax^2$, $du=\frac{1}{\sqrt a}dx$

$\int_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-2sx^2}dx=0$ $\quad$ sym $\quad\Rightarrow u=-2sx^2$, $dx=-\frac{1}{4sx}du$

$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-2sx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{32s^3}}=\left(-\frac12\right)\frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-2sx^2}$ $\quad$ Trick

Error-Funktion: $\mathrm{erfc}\,x=1-\mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt\pi}\int_x^{\infty}e^{-u^2}du$

$\int_0^\infty x^n\exp(-ax)\,dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$ $\quad E=\gamma mc^2$

$[e]=As$ $\quad[L]=Nms$ $\quad[\sigma]=\frac{W}{m^2K^4}$

$[k_B]=\frac{kgm^2}{s^2K}$ $\quad[\omega_r(T)]=\frac{J}{m^3Hz}$

$[h]=\frac{kgm^2}{s}$ $\quad[\omega_\lambda(T)]=\frac{J}{m^4}$ $\quad J=\frac{kg\,m^2}{s^2}=Nm=VAs=CV=Ws$

$\int_a^b\sin^2(\alpha x)dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha}\right]_a^b$

$\int_a^b\cos^2(\alpha x)dx=\left[\frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha}+\frac{x}{2}\right]_a^b$

Laplace in Kugelkoordinaten

$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

Rechenregeln: Betragsquadrat

$|z|^2=z^*z$ $\quad|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

1) $|z|^2=|z^2|$

2) $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2=\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$

4) $|e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}|^2=4\cos^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)=2+2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$

5) $|z_1\pm z_2|=r_1^2+r_2^2\pm2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$

$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$

$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(y)\sin(x)$

$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$

$\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x)-\sin(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin^2(x)=\frac12(1-\cos(2x))$

$\cos^2(x)=\frac12(\cos(2x)+1)$ $\quad A_{Kugel}=4\pi R^2$

Dipolmomente: $\vec{F}=\nabla(\vec{p}\cdot\vec{E})$, $\vec{D}=\vec{p}\times\vec{E}$, $\vec{F}=\nabla(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$, $E_{pot}=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

Wellengleichung - Mathias Trick

$\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$ $\quad u=kx-\omega t$, $\frac{\partial u}{\partial t}=-\omega$, $\frac{\partial u}{\partial x}=k$

$\Rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial u}k$

$\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}k\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}k^2$

Wellengleichung $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

Wellen/Doppelspalt

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega=2\pi\nu$, $f=\frac{1}{T}$

Phasengeschw. $\quad V_{Ph}=\frac{\omega}{k}$

Gruppengeschw. $\quad V_{gr}=\frac{d\omega}{dk}$

↳ Teilchengeschw.

$\frac{\omega_A}{k_A}=\frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}=v_{Ph}$ $\quad\frac{\omega_{mod}}{k_{mod}}=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}=v_{gr}$

1) Wellenpaket hat keine endliche Ausdehnung

2) externe Kraft kann Dispersion kompensieren

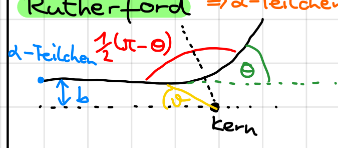
3) Energie eines Wellenpakets ist nicht sinnvoll

Klassische Atomphysik

$b=\frac{zZe^2}{8\pi\varepsilon_0E_{kin}}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Rutherford

⇒ α-Teilchen auf Goldfolie schießen



1) winziger, massiver, positiver Kern

2) große, leere Hülle mit Elektronen

$E_{kin}=\frac{p^2}{2m}$, $\quad m_\alpha c^2=c^2(m_{Th}+m_{He})+E_{kin}$

$0=p_\alpha=p_{Th}+p_{He}\Rightarrow p_{Th}^2=p_{He}^2$

$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$ $\quad$ bei $r=$ minimal: $E_{pot}=E_{kin}$

$\frac{\Delta n}{\Delta\Omega}=nN_A\frac{d\sigma}{d\Omega}$ $\quad N_vm_{An}=\rho A_u$, $N_A=\alpha xN_v$

$\frac{dn}{d\Omega}=\frac{N_A\alpha x}{r^2}\frac{1}{4}\left(\frac{zZe^2}{8\pi\varepsilon_0E_{kin}}\right)^2\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Atomspektren

Balmer-Formel $\frac{1}{\lambda}=R_\infty\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$ $\quad m>n\in\mathbb{N}$

↳ Balmer für $n=2$, Lyman für $n=1$ $\quad\lambda=\frac{ch}{E_n-E_m}$

$R_\infty=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}$, $R=cR_\infty$, $R_y=hcR_\infty$

Bohrsches Atommodell

Bahnwechsel $h\nu=E_{n_i}-E_{n_j}$ $\quad\oint p\,dq=nh$

Bahngeschw. $v_n=\frac{h}{2\pi m r_n}n$

Bahnradius $r_n=\frac{\varepsilon_0h^2}{e^2\pi m}n^2$ $\quad\overset{n=1}{\Rightarrow}$ $r_1=a_0=5{,}3\cdot10^{-11}\,m$

Energie $E_n=-\frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}$ $\quad\overset{n=1}{\Rightarrow}$ $E_1=-13{,}6\,eV$

$=-\frac{13{,}6\,Z^2}{n^2}$

Bohrsche Postulate

1) bestimmte Bahnen um Kern

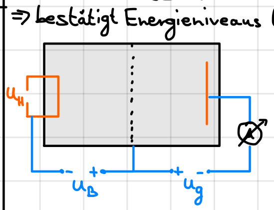
2) Bewegung der Elektronen ohne Energieverlust

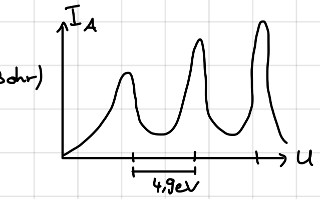
$\Rightarrow\oint p\,dq=nh\Rightarrow\oint pr\,d\varphi=mvr\oint d\varphi=nh$

3) Korrespondenzprinzip ⇒ klassisch für n groß

Franck-Hertz-Versuch

⇒ bestätigt Energieniveaus (⇒ Bohr)





↳ Anregen von Elektronen der Hg-Atome

Tool: Wahrscheinlichkeit Teilchen in state finden

$P_0=|\langle0|\psi(t)\rangle|^2$

Tool: Wahrscheinlichkeit außerhalb x_0 zu finden

$P_{out}=2\int_{x_0}^{\infty}|\psi(x,0)|^2dx$

Herleitung: Bohrsches Atommodell $\quad\omega=\frac{v}{r}$

1) Kräftegleichgewicht: $F_c=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r}=F_{Zp}$

2) evtl. $M=$ endl.: im Schwerpunkt: $-M|\vec{r}_1|^2+m|\vec{r}_2|^2=0$

$\Rightarrow\mu=\frac{Mm}{M+m}\Rightarrow r_1=\frac{\mu r}{M}$, $r_2=\frac{\mu r}{m}$

3) $L=mvr=m\omega r^2=n\hbar$ / $mvr\oint d\varphi=nh$

$\Rightarrow v=\frac{n\hbar}{mr}$ / $v=\frac{n\hbar}{\mu r}$ mit L_{tot}

4) $r=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2\mu}n^2$

$E_n=E_{kin}+E_{pot}=\frac12mv^2-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0r_n}=\frac12\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r_n}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r_n}$

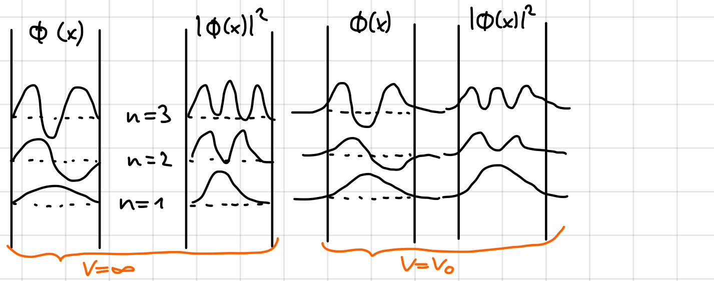
$=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0r_n}=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}$

Trick: $\langle E_{kin}\rangle=\frac{\langle p^2\rangle}{2m}$

Stationäre Schrödingergleichung

Potentialtopf

$$V(x)=\begin{cases}0 & \text{für } 0<x<L\\ \infty & \text{für } x\le 0, x\ge L\end{cases}$$



1) Schrödingergl. $\boxed{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi(x)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=0}$

2) $\psi k^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=0 \Rightarrow k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

3) Lsg.: $\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ oder $\psi(x)=A\sin(kx)+B\cos(kx)$

für unendlich: $\psi(0)=0=\psi(L) \Rightarrow \psi(x)=2A\sin(kx)$, $kL=n\pi$

$\psi(-\frac{a}{2})=\psi(\frac{a}{2})=0 \Rightarrow$ für $B=0 \Rightarrow \frac{ka}{2}=n\pi$, $n=1,2,3,\dots$

$\Rightarrow$ für $A=0 \Rightarrow \frac{ka}{2}=\frac{n\pi}{2}$, $n=1,3,5$

$\Rightarrow$ Koordinatenshift $\psi_n(x)=A\sin(k(x+\frac{a}{2}))$, $k=\frac{n\pi}{a}$

4) $\int_{-a/2}^{a/2}|\psi_n(x)|^2dx=1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{a}}$ $\quad \boxed{E_n=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2mL^2}}$

Zeitentwicklung: $e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$

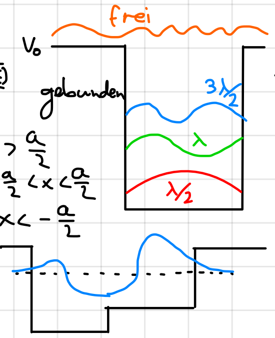
$\boxed{\psi_n(x)=i\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}}$ $\quad \frac{E_n}{\hbar}t_{Rev}=2\pi \Rightarrow T_{Rev}=\frac{4mL^2}{\pi\hbar}$

$\boxed{\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)\right)e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}}$ $\quad \boxed{E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}$

endlicher Potentialtopf

1) RB: I) $\psi(0)=\psi(L)$

II) $\frac{d\psi}{dx}(0)=\frac{d\psi}{dx}(L)$ $\quad k=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$



odd solution: $\psi(x)=\begin{cases}De^{-Kx} & x>\frac{a}{2}\\ A\sin(kx) & -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}\\ -\psi(-x) & x<-\frac{a}{2}\end{cases}$

Reflexionskoeffizient $\boxed{R=\frac{v_1|B|^2}{v_1|A|^2}}$

Eindringtiefe $\boxed{\Delta x=\frac{1}{K}}$ bzw. $\frac{1}{2K}$

im Potential: $\psi(x)$ $\quad E_n^{\text{endlich}}<E_n^{\text{unendlich}}$

	l=0	l=1	l=2
n=3	—	— — —	— — — — —
n=2	—	— — —	
n=1	—		

$\boxed{T=\frac{|C_1|^2}{|A_1|^2}, \ T+R=1}$

harmonischer Oszillator

2 Teilchen mit red. Masse $\frac{1}{\mu_0}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

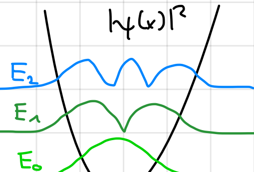
Energie: $E=\frac{p^2}{2\mu_0}+\boxed{\frac{1}{2}kx^2}$ $\quad V(x)$ $\quad \boxed{\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2}$

$E_0=\frac{\hbar\omega}{2}$, $\quad \boxed{E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$

$\phi_n(x)=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}2^nn!}\right)^{1/2}H_n(\sqrt{a}x)\exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right)$

revival time: $T_{rev}=\frac{2\pi\hbar}{\Delta E}$

allg: $\psi_0(x,0)=c_0\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ $\quad \psi(x,t=0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)$



$-\frac{\hbar^2}{2\mu_0}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)+\frac{1}{2}kx^2=E\phi(x)$

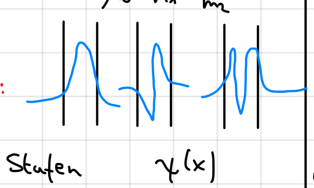
mit $a^2=\frac{\mu_0k}{\hbar^2}$, $b=\frac{2\mu_0E}{\hbar^2}$ $\quad \frac{1}{\mu_0}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\phi(x)-a^2x^2\phi(x)=-b\phi(x)$

Unterschiede zum klassischen:

1) $E_0=\frac{\hbar\omega}{2} \Rightarrow$ nicht 0

2) E nicht kontinuierlich $\Rightarrow \hbar\omega$ Stufen



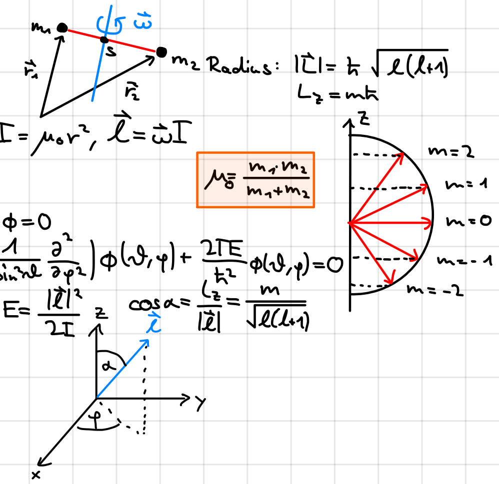
starrer Rotator

$\dot{\vartheta}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}-\frac{d\vec{r}_2}{dt}$

Annahmen: $E=\frac{I|\vec{\omega}|^2}{2}$, $I=\mu_0r^2$, $\vec{\ell}=\vec{\omega}I$

$\Rightarrow E=\frac{\vec{\ell}^2}{2I}=\frac{\mu_0v^2}{2}=\frac{\vec{p}^2}{2\mu_0}$ $\quad \boxed{\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}$

Radius: $|\vec{L}|=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$, $L_z=m\hbar$



Schrödinger: $\Delta\Phi+\frac{2\mu_0}{\hbar^2}E\Phi=0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\phi(\vartheta,\varphi)+\frac{2IE}{\hbar^2}\phi(\vartheta,\varphi)=0$

$\Rightarrow \frac{2IE}{\hbar^2}=\ell(\ell+1) \Rightarrow E=\frac{|\vec{\ell}|^2}{2I}$ $\quad \cos\alpha=\frac{L_z}{|\vec{L}|}=\frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$

$\boxed{|\vec{L}|=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}}$

$\boxed{\ell_z=m\hbar}$

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$\Rightarrow$ wenn nicht aufzufinden $\Rightarrow 0$

$\Rightarrow$ wir wollen finden: $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J M\rangle$

1) J, M berechnen
2) $j_1, j_2 \to$ Tabelle
3) $m_1, m_2 \to$ Zeile
4) J, M $\to$ Spalte
5) $-x \to -\sqrt{x}$

Rückrichtung:
1) $|J,M\rangle$ einzeln für mögliche m berechnen
2) einsetzen und nach states umformen

$|J,M\rangle=\sum_{m_1}\sum_{m_2}C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2}|j_1,m_1,j_2,m_2\rangle$

mögliche Ergebnisse: $m_z=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\hbar}{2}$, $m_z=-\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{\hbar}{2}$

$P\cdot\left|\frac{1}{2}\left(1+e^{\frac{2\pi}{T}t}\right)\right|^2$

$=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$

Kugelflächenfunktionen

1) orthogonal $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y_\ell^m(\varphi,\vartheta)\left(Y_{\ell'}^{m'}(\varphi,\vartheta)\right)^*d\cos\vartheta d\varphi=\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$

2) $Y_{\ell_1}^{m_1}(\varphi,\vartheta)Y_{\ell_2}^{m_2}(\varphi,\vartheta)=\sum_{\ell=|\ell_1-\ell_2|}^{\ell_1+\ell_2}\sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}}$

$\langle \ell_1 m_1,\ell_2 m_2|\ell m\rangle\langle\ell_1 0,\ell_2 0|\ell 0\rangle Y_\ell^{m_1+m_2}(\varphi,\vartheta)$

Clebsch-Gordan

2) $\left(Y_\ell^m(\varphi,\vartheta)\right)^*=(-1)^mY_\ell^{-m}(\varphi,\vartheta)$

3) $L_+=L_x+iL_y$, $L_-=L_x-iL_y$

$L_\pm Y_\ell^m(\varphi,\vartheta)=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}Y_\ell^{m\pm1}(\varphi,\vartheta)$

$V(x)=\begin{cases}0 & -a<x<a\\ \infty & \text{sonst}\end{cases}$

1) $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

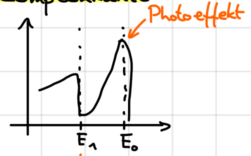
2) RB: $\psi(-a)=\psi(a)=0$

3) $A\cos(ka)=0$

$\Rightarrow k=(2n+1)\frac{\pi}{2a}$

$\Rightarrow E=\frac{(2n+1)^2\hbar^2\pi^2}{2m(2a)^2}$

Comptonkante



$E_{Ph,streu}=\frac{E_0}{1+\frac{E_0}{mc^2}(1-\cos\Theta)}$

$E_{kin_e}=E_0-E_{Ph,streu}$

Schrödinger-Gleichung-2 Teilchen

$\left(-\frac{\hbar^2}{2M_1}\Delta_1-\frac{\hbar^2}{2M_2}\Delta_2+V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E\phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$

Schwerpunkt $\vec{R}(X,Y,Z)=\frac{M_1\vec{r}_1+M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}=\frac{M_1\vec{r}_1+M_2\vec{r}_2}{M_S}$

mit $\vec{r}(x,y,z)=\vec{r}_1-\vec{r}_2$

$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{M_1}{M_S}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial x}$

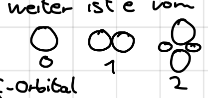
$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2M_S}\Delta_R-\frac{\hbar^2}{2M_0}\Delta_r+V(\vec{r})\right)\phi(\vec{r},\vec{R})=E\phi(\vec{r},\vec{R})$

$\phi(\vec{r},\vec{R})=e^{i\vec{k}_S\vec{R}}\tilde{\phi}(\vec{r})$ $\quad \Rightarrow E=\tilde{E}+E_S$

How-to: Quantenzahlen

$n=1,2,3,\dots$ Hauptquantenzahl, je größer n, desto weiter ist e^- vom Kern entfernt $\Rightarrow$ größere Energie $\nearrow$ maximal $2n^2$ Elektronen pro Schale

$0\le\ell<n$ Nebenquantenzahl $\Rightarrow$ Drehimpuls
0: s-Orbital, 1: p-Orbital, 2: d-Orbital, 3: f-Orbital



$-\ell\le m\le\ell$ Magnetquantenzahl

s Spinquantenzahl: $\frac{1}{2}$ (Elektron, Protonen, Neutronen), 1 (Photonen)

$-S\le m_S\le S$ $\quad \boxed{n^{2s+1}\text{"}\ell\text{"}_j}$

$j=|\ell-s|,|\ell-s|+1,\dots,\ell+s$ Gesamtdrehimpuls (ℓ und s)

$-j\le m_j\le j$

$S=|s_1-s_2|,\dots,s_1+s_2$ Gesamtspin $\quad 3^{\nearrow}2S+1$

$M=m_1+m_2$

$J=|j_1-j_1|,\dots,j_1+j_2$

Orbitale: $1s^2, 2s^2, 2p^6$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dipolstrahlung}\\ \Delta\ell=\pm1\\ \Delta m=0,\pm1\end{array}}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l}0\ s\\ 1\ p\\ 2\ d\\ 3\ f\end{array}}$

normaler Zeeman-Effekt

$I=\frac{Q}{t}=\frac{-ev}{2\pi r}=\frac{-e\omega}{2\pi}$, $\vec{\mu}=I\vec{A}=-\frac{e}{2}r^2\omega\vec{n}$

$\boxed{\vec{\mu}=-\frac{e}{2m_e}\vec{l}}$, $\sqrt{\vec{\mu}^2}=\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{\ell(\ell+1)}=\beta\sqrt{\ell(\ell+1)}$ mit $\beta=\frac{e\hbar}{2m_e}=9{,}27\cdot10^{-24}\frac{J}{T}$

$\mu_z=-\frac{e}{2m_e}m\hbar=-\beta m$

für Wasserstoff, $\ell\ne0$, ext. Feld $\vec{B}$ (z-Achse): $\quad \boxed{E_{\text{ionisation}}=-E_1}$

$E_{mag}=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-\mu_zB=\beta Bm$

$E_{n,m}=E_n+E_{mag}=-\frac{m_ec^2}{2}(Z\alpha)^2\frac{1}{n^2}+\beta Bm$ mit $\alpha^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\approx\frac{1}{137}$

$\vec{B}$ wirkt auf $\vec{\mu}$ und führt zu Präzessionsbewegung mit Lamor-Frequenz

Lamor-Frequenz: $\omega_L=\frac{\beta}{\hbar}B$

$g_j=1+\frac{j(j+1)-\ell(\ell+1)+s(s+1)}{2j(j+1)}$ Landé-Faktor

myonischer Wasserstoff: $R_\mu=R_\infty\frac{\mu_M}{\mu_H}$

Wasserstoffatom

$\boxed{E_n=-\frac{\mu Z^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\frac{1}{n^2}}$ $\quad$ Kernladung, mit $\mu=\frac{m_em_p}{m_e+m_p}$

$\boxed{\Delta\phi(\vec{r})+\frac{2M_e}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)\phi(\vec{r})=0}$

für Wasserstoff: Z=1

myonischer Wasserstoff: $\mu=\frac{207m_em_p}{207m_e+m_p}$

Ionisationsenergie des Grundzustands:

Myonium: $\mu=\frac{207m_em_e}{207m_e+m_e}$

$\boxed{E_1=-\frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}}$ $\quad \boxed{r=\frac{\varepsilon_0h^2}{e^2\pi\mu}}$ $\quad \boxed{\rho(r)=4\pi r^2|\psi_{100}(r,\theta,\varphi)|^2}$

Teilchen im Delta-Potential

$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{-kx}+Be^{kx} & x<0\\ Fe^{-kx}+Ge^{kx} & x>0\end{cases} \Rightarrow \psi(x)=\begin{cases}Be^{kx} & x<0\\ Be^{-kx} & x>0\end{cases}$

$\Rightarrow$ soll nicht divergieren $\Rightarrow A=0, G=0$

$\Rightarrow$ stetig bei $x=0 \Rightarrow B=F$

Normierung $\int_{-\infty}^{0}|\psi(x)|^2dx+\int_0^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$

1) außerhalb $\frac{2m}{\hbar^2}E\psi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=0 \Rightarrow k^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}$ $\quad \Rightarrow A=\sqrt{k}$

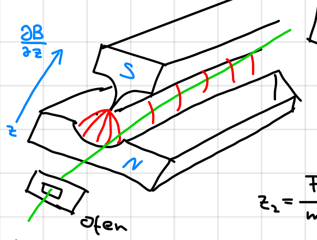
2) $x\to0$ $\quad \frac{2m}{\hbar^2}(E+\alpha\delta(x))\psi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=0 \quad \Big|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$

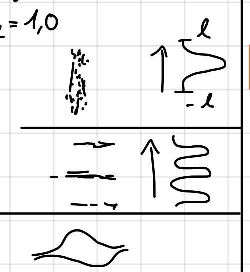
$\Rightarrow \frac{2m}{\hbar^2}\alpha\psi(0)+\frac{d}{dx}\psi\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Rightarrow k=\frac{m\alpha}{\hbar^2}=E=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$

Stern-Gerlach-Experiment

$m_{Ag}=108u$

$\boxed{\vec{\mu}_s=-g_s\frac{e}{2M_e}\vec{s}}$; experimentell: für Elektron: $g_s=2{,}0$, $g_\ell=1{,}0$





$z_2=\frac{F_z}{mv_{RMS}^2}\left[\frac{\Delta y_1^2}{2}+\Delta y_1\Delta y_2\right]$ aber:

1) neutrale Atome $\Rightarrow$ keine Coulomb-Ablenkung
2) inhomogenes Magnetfeld

Ag-Atom: 5 Schalen, $47e^-$

$V=-\vec{\mu}_s\vec{B}$ $\quad S_z=\pm\frac{\hbar}{2}$

$\Rightarrow F_z=\frac{\partial V}{\partial z}=-\mu_z\frac{\partial B}{\partial z}$

$=g\cdot\mu_Bm_{s,z}\frac{\partial B}{\partial z}\stackrel{!}{=}ma_z$

$\mu_z=g_s\frac{e}{2M_e}S_z$

$=\pm2\beta\frac{1}{2}=\pm\beta$

1) $\frac{1}{2}mv^2=\frac{3}{2}k_BT \Rightarrow v_{rms}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$

2) $t=\frac{L}{v_{rms}}$

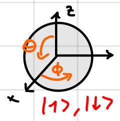
3) $d_z=\frac{1}{2}a_zt^2 \Rightarrow F_z=ma_z$

4) $F_z=-\mu_z\frac{\partial B}{\partial z}$ $\quad \mu_B=\beta=\frac{e\hbar}{2m_e}$ $\quad \frac{\partial B}{\partial z}=\frac{F_z}{g\mu_Bm_s}$

$\mu_z=-g\frac{e}{2m_e}m_s\hbar=-g\mu_Bm_s$

Bloch sphere

$|\psi\rangle=r\left[\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)|0\rangle+\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)(\cos\phi+i\sin\phi)|1\rangle\right]$



$|0\rangle=\binom{1}{0}$, $|1\rangle=\binom{0}{1}$

$\binom{1}{0}=|s,m_s\rangle=|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, $\binom{0}{1}=|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

$S_\pm|s,m_s\rangle=\hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm1)}|s,m_s\pm1\rangle$ $\quad S_\pm=S_x\pm iS_y$

Revival time

$\Phi=\frac{(E_1-E_0)}{\hbar}t\stackrel{!}{=}2\pi$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$ $\quad \cos\Theta=1-2\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)$
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$
$\Rightarrow \sin\Theta=2\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)}=\frac{4}{5}$

$x=r\sin\Theta\cos\phi$
$y=r\sin\Theta\sin\phi$
$z=r\cos\Theta$

Dispersion

$|\psi(x,t)|^2=|\psi_0|^2\frac{\sqrt{2}s}{\sigma(t)}e^{-\frac{(x-x_0-tv_g)^2}{\sigma^2(t)}}$

↳ speed v_g
↳ wird breiter und flacher

$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4 \Rightarrow \omega=c\sqrt{k^2+k_c^2}$

Gauß-Term: $\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ Zentrum, Breite

$|\psi(x,t)|^2=|\psi_0|^2\frac{\sqrt{2}s}{\sigma(t)}e^{-\frac{(x-x_0-tv_g)}{\sigma^2(t)}}$ Normierung

1) $\omega\sim k$: $v_g=v_{ph} \Rightarrow$ keine Dispersion, Welle bewegt sich mit v_g

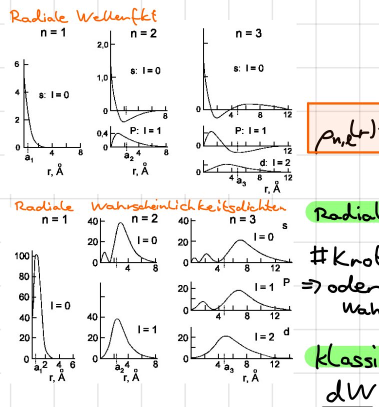
2) $\omega=ak+b$: $v_g\ne v_{ph} \Rightarrow$ keine Dispersion, Welle geht mit v_g, einzelne Peaks mit v_{ph}

3) ω nicht k-linear: Dispersion $\Rightarrow$ Welle zerfließt

nicht-relat.: $\omega(k)=\frac{mc^2}{\hbar}+\frac{k^2\hbar}{2m}$ $\quad \sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}$

hoch-rel: $\omega(k)=ck$

Radiale Wellenfkt



$\boxed{\rho_{n,\ell}(r)=|rR_{n,\ell}(r)|^2}$

$R_{n,l,m}=N_{n,l}\exp\left(-\frac{\varrho}{2}\right)\varrho^lL_{n-l-1}^{2l+1}(\varrho)$

$l<n$ und ϱ ist definiert durch:

$\varrho=\frac{2Zr}{na_0}$

Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte

#Knoten $=n-\ell-1$ $\quad \ell\ne0 \Rightarrow 0$ bei $r=0$

$\Rightarrow$ oder Nullstellen der Wahrscheinlichkeitsdichte

$\Delta x\Delta p=\hbar(n+\frac{1}{2})\ge\frac{\hbar}{2}$

klassischer harm. Oszillator

$\frac{dW}{dx}=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}$

harmonischer Oszillator

$\omega^2=\frac{k}{m}$, $\text{erfc}(1)=0{,}157$

$V=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ $\quad I=I_0e^{-\mu x}$ $\quad \frac{x}{\ln(10)}=\frac{B}{m}$

Matrix-Formalismus

m' \ m	1	0	-1
1			
0			
-1			

$\gamma\approx1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$

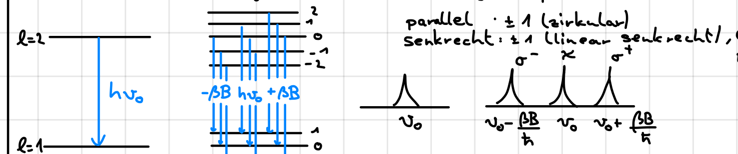
$P_n(t)=|c_n(t)|^2$ mit Vorfaktor, aber ohne globale Phase

↳ jeweils der Faktor vor dem state mit dem EW

normaler Zeemann

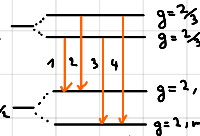
$j=\ell, s=0$ $\quad h\nu=h\nu_0+\Delta m\beta B$

parallel: ±1 (zirkular)
senkrecht: ±1 (linear senkrecht), 0 linear parallel



Zeeman

$\boxed{\gamma=\frac{g_s\mu_B}{\hbar}}$ $\quad B=\frac{3}{8}\frac{hc}{\mu_B}\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{D_1}^2}$



$\boxed{\Delta E=\mu_Bgm_jB}$ $\quad \Delta\lambda_{(4-1)}=-hc\left(\frac{1}{\Delta E_4}-\frac{1}{\Delta E_1}\right)$

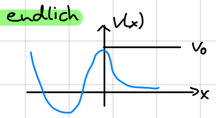
rel. Doppler: $f_{beo}=f_{Quelle}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

$\Delta E_1=E_2-\frac{1}{3}\mu_B-(E_1+\mu_BB)$ $\quad \Delta E_{(B=0)}=E_2-E_1$ $\quad \Delta E_{Doppler}=-\hbar kv$

1) Normierung $\langle\psi|\psi\rangle\stackrel{!}{=}1$
2) zeitabh. $\cdot e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \Rightarrow$ globale Phase
3) $t_{Rev}\cdot\dots=2\pi$
4) $P_0=|\langle0|\psi(t)\rangle|^2$

Potentialstufe mit V_0 = endlich

$V(x)=\begin{cases}V_0 & \text{für } x>0\\ 0 & \text{für } x\le0\end{cases}$



I) $E>V_0$

$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$ $\quad \psi_1(0)=\psi_2(0)$
$\psi_2(x)=Ce^{ik_2x}$ $\quad \frac{d}{dx}\psi_1(0)=\frac{d}{dx}\psi_2(0)$

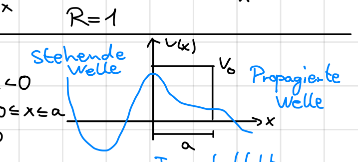
$k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $\quad k_2=\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$

II) $E<V_0$

$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$ $\quad K=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$
$\psi_2(x)=Ce^{Kx}$ $\quad R=1$

Potentialwall

$V(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x<0\\ V_0 & \text{für } 0\le x\le a\\ 0 & x>0\end{cases}$



$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+B^{ik_1x}$ $\quad k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $\quad K=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$
$\psi_2(x)=Ce^{Kx}+De^{-Kx}$
$\psi_3(x)=Ee^{ik_3x}$ $\quad k_3=k_1$

$T\approx16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2Ka}$

Wechselwirkungsenergie (He)

$E_{Grund}=-Z^2\,13{,}6eV\cdot2=-108{,}8eV$

$E_H+E_{io}=2E_H+E_{ww} \Rightarrow E_{ww}=-29{,}8eV$

$\langle r\rangle=\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\psi^*r\psi r^2\sin\theta$