Wasserstoffatom

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2 Z} = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar c}{\mu c^2 Z}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi(\vec r) + V(\vec r)\,\psi(\vec r) = E\,\psi(\vec r) \qquad V(\vec r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec r|}$$

$\Rightarrow$ Lsg: $\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$\cos\theta = \frac{L_z}{|\vec L|} = \frac{L_z}{\hbar\sqrt{l(l+1)}}$

$E = -\frac{1}{n^2}\mu\frac{Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -R_y \cdot \frac{Z^2}{n^2} \qquad \mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K}$

$R_y = R_\infty hc,\ \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$

"n^2-entartet"

$E_n = -\frac{Z^2}{n^2}\frac{\mu c^2}{2}\alpha^2 \qquad \mu = m_e$ für $m_K = \infty$

$W(r)dr = \left(\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 \sin\theta\right) dr \Rightarrow a_\mu = a_0 \frac{m_e}{m_\mu}$

$\Rightarrow$ max. bei $r_m = \frac{a_0}{Z}$ mit $a_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar c}{m_e c^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$

$\langle r\rangle = \frac{3}{2}a_0$ (für H), $\Delta E = E_k - E_n = R_y\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$

1) **ohne Spin** $\psi = \psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)$ — n^2

2) **mit Spin** $\psi_k = \psi_{nlm} \cdot \chi_{m_s}$ — $2n^2$ abh. m_s
$(s = \frac{1}{2},\ s_z = \pm\frac{1}{2})$

3) **Feinstruktur** (Spin u. Drehimpuls koppeln, nur e^-)

$I = \frac{-ev}{2\pi r} = \frac{-e\omega}{2\pi} \qquad \vec\mu = I\cdot\vec A = \frac{-e\omega}{2\pi}\pi r^2\vec n \qquad \vec l = m_e r^2 \omega \vec n$

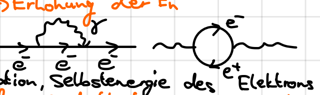
$\Rightarrow \boxed{\vec\mu_l = -\frac{e}{2m_e}\vec l,\quad \vec\mu_s = -g_s\frac{e}{2m_e}\vec s}$ + rel. Korrektur

$j = l + \frac{1}{2},\ j = l - \frac{1}{2}$ — Entartung: $2j+1$ pro n

$E_{nj} = E_n\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\right)$

$|E_{nj}| > |E_n| \Rightarrow$ Erhöhung der E_n

4) **Lamb-Shift**



$\Rightarrow$ Vakuumpolarisation, Selbstenergie des Elektrons
abh. von n, l $\Rightarrow$ Aufhebung der (n,j) Entartung für verschiedene l

$\Rightarrow$ Effekt ist kleiner für große l (e^- weiter weg)

$\Rightarrow$ Effekt reduziert gesehene Ladung (e^- schwächer gebunden)

5) **Hyperfeinstruktur** (Ges.drehimpuls e^- und Kernspin I koppeln)
Kopplung von $\vec J = \vec L + \vec S$ und $\vec I$ $\quad \vec F = \vec J + \vec I$

$\Rightarrow$ Aufspaltung $\propto \vec J \vec I$ — abh. von l (Abstand z. Kern)

$\frac{\vec\mu_S}{\vec\mu_K} = \frac{m_K}{m_e} \approx 2000$ (schwächer als Feinstruktur)

Drehimpulskopplung

j, s oder j_1, j_2

1) $|l - s| \le j \le l + s$ / $|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2$

2) $m_j = m_l + m_s$ / $M = m_1 + m_2$

(3) $|J| \ge M$)

Clebsch-Gordan:

$$|J, M, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \underbrace{\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle}_{CG}$$

$|j_1, m_1\rangle + |j_2, m_2\rangle \Rightarrow |J, M\rangle$

1) J, M berechnen
2) $j_1, j_2 \to$ Tabelle
3) $m_1, m_2 \to$ Zeile
4) $J, M \to$ Spalte
5) $-x \to -\sqrt{x}$

$|J, M\rangle = a|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \ldots$

1) J berechnen
2) mögliche Kombis für m_1, m_2
3) $j_1, j_2 \to$ Tabelle
4) $J, M \to$ Spalte
5) Summe aus Zeilen

Helium-Atom

$$\hat H = \sum_{i=1}^{Z=2}\left(\frac{\hat p_i^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0|\vec r_i|}\right) + \sum_{i,j:\,i<j}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|\vec r_i - \vec r_j|} + \hat O(\vec l_1, \vec l_2, \vec s_1, \vec s_2, \vec I)$$

$\Rightarrow$ Zentralfeldnäherung: $\psi(\vec r_1, \vec r_2) = \psi_a(\vec r_1)\cdot\psi_b(\vec r_2)$

$\Rightarrow$ Abschirmung: $E_{He} = -Z^2 \cdot 13{,}6\,\text{eV} - (Z - \Sigma)^2 \cdot 13{,}6\,\text{eV}$

$\Sigma = 0{,}65$ $\quad \boxed{E_{bind} = -13{,}6\,\text{eV}\cdot(Z_{eff}/n)^n}$

$\boxed{E_{ion,} = +13{,}6\,\text{eV}\cdot((Z-\Sigma)^2/n^2)^2}$

$\Rightarrow$ l-Entartung aufgehoben, fester gebunden für l klein

$\Rightarrow e^-\ (s = \frac{1}{2})$ ununterscheidbar $\Rightarrow |\psi_{ab}|^2 = |\psi_{ba}|^2$

$\Rightarrow$ Pauli-Prinzip: 2 Fermionen müssen sich in einer Quantenzahl unterscheiden

$\psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt 2}\left(\psi_a(\vec r_1)\psi_b(\vec r_2) - \psi_a(\vec r_2)\psi_b(\vec r_1)\right)$ — Zustand b

$\psi_{ges} = \psi_{space}\,\chi_{spin}$

$S=1:\ \chi_s^{-1} = \chi_1(\downarrow)\chi_2(\downarrow)$

$\chi_s^0 = \frac{1}{\sqrt 2}\left(\chi_1(\uparrow)\chi_2(\downarrow) + \chi_1(\downarrow)\chi_2(\uparrow)\right)$ — Sym. $1\leftrightarrow 2$, Ortho-Helium

$\chi_s^1 = \chi_1(\uparrow)\chi_2(\uparrow)$

$S=0\quad \chi_a = \frac{1}{\sqrt 2}\left(\chi_1(\uparrow)\chi_2(\downarrow) - \chi_1(\downarrow)\chi_2(\uparrow)\right)$ — asym $1\leftrightarrow 2$, Para-Helium

$\boxed{\Rightarrow \psi_{ges}\text{ muss antisymmetrisch}}$
$\boxed{\psi_{ges}(\vec r_1, \vec r_2) = -\psi_{ges}(\vec r_2, \vec r_1)}$ — für Fermionen

Notation: $n\ \boxed{{}^{2S+1}L_J}$

Auswahlregeln: 1) $\Delta L = \pm 1$ 2) $\Delta m_L = \pm 1$ 3) $\Delta S = 0$ 4) $\Delta J = 0, \pm 1$ (kein $J=0 \to J=0$)

Mehrelektronensysteme

$\boxed{{}^{2S+1}L_J}$ — als Buchstabe!!!

LS-Kopplung (leichte Atome)

$\vec L = \sum_i \vec l_i;\ \vec S = \sum_i \vec s_i \Rightarrow \vec J = \vec L + \vec S \qquad \vec l_i \vec s_i \ll \vec l_i \vec l_j / \vec s_i \vec s_j$

$|\vec L| = \sqrt{L(L+1)}\,\hbar$ ($|S|$ und $|J|$ analog)

$\Rightarrow$ # Feinstrukturniveaus $\boxed{\min(2S+1, 2L+1)}$

$\Rightarrow S=0$ Energieniveaus liegen höher $\Rightarrow S = \frac{3}{2}$ sym.

Symmetrie: $L=1$ antisym, $L=0,2$ sym; $S=0$ antisym, $S=1$ sym

$\boxed{\Delta E \sim \vec L \cdot \vec S}$ $\quad \vec J^2 = (\vec L + \vec S)^2 \Rightarrow \vec L\vec S = \frac{1}{2}(\vec J^2 - \vec L^2 - \vec S^2)$ $\hookrightarrow S = \frac{1}{2}$ antis.

$\langle\vec L\vec S\rangle = \frac{1}{2}\left[J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right]\hbar^2$

$\mapsto Z \approx 40$

jj-Kopplung (schwere Atome) $\sim l_i s_i$ groß (Feinstrukt.) $\Delta E \propto Z^4/n^3$

$\vec j_i = \vec l_i + \vec s_i \Rightarrow \vec J = \sum_i \vec j_i \qquad \boxed{(j_1, j_2)_J}$

Hundsche Regeln

1) für abgeschl. Unterschalen $J = L = S = 0$
2) nicht abgeschl. Schale: Zustände mit max. Spin energetisch am günstigsten $\Rightarrow {}^3D$ tiefer als ${}^1D$
3) Schalen mit max. Spin: Zustände mit max. L am günstigsten
4) Schale weniger als halb gefüllt: $J = |L - S|$ } Grundzustand
Schale mehr als halb gefüllt: $J = L + S$ $\hookrightarrow$ Rest ist angeregt
$\Rightarrow$ energetisch am günstigsten $\quad m_l$: +1 0 -1

$\Rightarrow$ l-Unterschale gibt Kästchen an $\quad l = 1$: ☐☐☐

$\boxed{L = \sum m_l}$ Rechenregel $\quad$ Pauli prüfen!!! $n = n'$

Ordnung der Elemente

$\boxed{E_{ion} = R_y \frac{Z_{eff}^2}{n^2}}$, $r_n = \frac{(\hbar c)n^2}{m_e c^2 Z_{eff} e^2}$ $\Rightarrow$ allg.

r_n = mittlerer Radius des am schwächsten gebundenen Elektrons

$\Rightarrow E_{ion}$ am größten für Edelgase

Angeregte Zustände

Auswahlregeln verletzt $\Rightarrow$ lange τ

Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$ — τ = Lebensdauer

Übergang $|i\rangle \to |k\rangle$: $|A_{ki}|^2 = |\langle k|\hat H_{ww}|i\rangle|^2 = e^2\left|\int \psi_k^* \hat r \psi_i\, dV\right|^2$

Auswahlregeln (Mehrelektronsysteme): 1) $\Delta L = \pm 1$ 2) $\Delta M = 0, \pm 1$ 3) $\Delta S = 0$ 4) $\Delta J = 0, \pm 1$ (kein $J=0 \to J=0$)

Drehimpulserh. da $S=1$ Boson ist

$\Delta E\tau \approx \hbar \quad \Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$

$\Delta\omega = \frac{1}{\tau}$

$\Rightarrow$ kurzlebiger Zustand $\Rightarrow$ große natürliche Linienbreite

Auger-Elektron: e^- aus innerer Schale geschlagen $\to e^-$ rückt nach $\to$ Photon $\hookrightarrow$ Photon löst Hüllelektron

Röntgenstrahlung:

charakteristisch $\Delta E = E_i - E_j = h\nu_{ij} = -(Z - \Sigma)^2 R_y\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$

$K_\alpha: 2\to 1,\ K_\beta: 3\to 1,\ K_\gamma: 4\to 1,\ L_\alpha: 3\to 2$

Grenzwellenlänge: $\lambda_G = \frac{hc}{eU_B}$ $(\lambda \ge \lambda_G)$

Bragg-Bed: $\boxed{2d\cdot\sin\theta = n\lambda}$ $n = 1,2,3$ — d: Absorberdicke

Absorption von Röntgenstrahlung: $\mu = \mu_s + \alpha$ (Absorption, Streuung; Abschwächungskoeff.)

$dI = -\mu I dx \Rightarrow I(d) = I_0 e^{-\mu d}$

Mosley $\boxed{\bar\nu_k = \frac{1}{\lambda_k} \propto (Z-1)^2}$ $\Rightarrow K_\alpha$ liegt bei kürzeren λ für größere Z

($\Sigma = 1$ für ein 1s-Elektron) $\hookrightarrow$ für K-Kanten — frei in s-Schale — $\bar\nu_k$: K_α-Linie

Fundamentale Teilchen

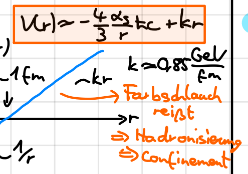
$q/e^- < 10^{-18}\,\text{m}$

Atom $10^{-10}\,\text{m}$, Kern $10^{-14}\,\text{m}$, Nukleon $10^{-15}\,\text{m}$,

eff. Pot zwischen q und $\bar q$ in Meson

Hadronen (Bindungen von Quarks): $\boxed{V(r) \approx -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r}\hbar c + kr}$
- Baryonen (3q)
- Mesonen ($q\bar q$)

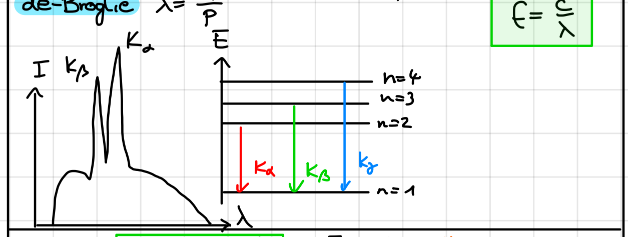
- em. WW: geladene Teilchen
- sWW: alle Teilchen
- SWW: nur Quarks



WW	rel. Stärke	Boson	Spin	Masse	Reichweite
S	1	8 Gluonen	1	0	< 1 fm
em	10^{-2}	Photon	1	0	∞
s	10^{-7}	$W^\pm, Z_0$	1	80,9 GeV/c²	$\sim 10^{-18}$ m
G	10^{-38}	Graviton	2	0	∞

Auflösung (Streuexperiment) $\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x}$

de-Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ $\qquad \boxed{E = h\cdot f,\ f = \frac{c}{\lambda}}$



Zerfall $\boxed{N(t) = N_0 e^{-t/\tau}}$ $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{1}{\lambda}$ — mittlere freie Weglänge

Wahrsch., dass Teilchen WW nach Strecke x $\quad P(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$

Wahrsch., dass Teilchen noch nicht zerfallen $\quad P(t) = e^{-t/\tau}$

Relativistische Kinematik

4er Impuls $p = (E, c\vec p)$

rel. Energie-Impuls-Bez. $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

Invariante $s = (p(A) + p(B))^2;\ E_{CMS} = \sqrt s$

$p^\mu p_\mu = E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$

S→S' Trafo $E' = c\gamma\left(\frac{E}{c} + \beta p_z\right) \qquad \boxed{\frac{E_{kin}}{E_0} \ll 1 \Rightarrow \text{nicht rel.}}$

$p_z' = \gamma\left(p_z + \beta\frac{E}{c}\right)$

1) System wählen
2) Grafik + 4er-Vektoren
3) 4er-Impulserhaltung
4) Gl. quadrieren + rel. E-p. Bez.

S'(bew.) $\propto S$(ruhend) +
S(ruh.) $\propto S'$(bew) −

Längenkontraktion $L = \frac{L'}{\gamma}$

Zeitdilatation $t = \gamma t'$

rel. Impuls $p = \gamma m\beta c$

rel. Energie $E = \gamma mc^2$

Rel. Parameter:

$\gamma = \frac{E}{mc^2} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\beta = \frac{pc}{E} \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

$\beta\gamma = \frac{p}{mc} \quad \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{mc^2}\right)^2}$

mittlere Zerfallslänge $L = \gamma v\tau = \gamma\beta c\tau$

1) Systemwechsel
2) Lorentz-Trafo
3) β, γ berechnen

fixed-target: $\sqrt s \sim \sqrt{2E_1 m_2 c^2}$

collider: $\sqrt s \sim 2\sqrt{E_1 E_2}$

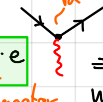
Schwellenbedingung
1) $s = (p_1 + p_2)^2$ im CMS
2) $s = (p_3 + p_4)^2$ im Labsys
3) s invariant

$\gamma = \frac{E_{lab}}{E_{CMS}} = \frac{E_{lab}}{\sqrt s}$

Feynman-Diagramme

$A_{fi} = \langle f|\hat H_{ww}|i\rangle = \int \psi_f^* \hat H_{ww}\psi_i\, d\vec x$

Vertex (em.)



4er-Impulserhaltung, Ladungserhaltung, Leptonenzahlerhaltung

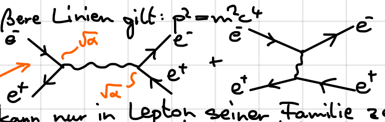
$\boxed{A_{fi} \propto e\cdot\frac{1}{q^2}\cdot e}$ $\Rightarrow$ virtuelles Photon verletzt Energie-Impuls-Bez.

$\alpha \sim e^2$ Propagator $\quad$ WW-Rate $\sim |A_{fi}|^2$

$\Rightarrow$ für reelle äußere Linien gilt: $p^2 = m^2c^4$

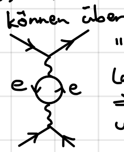
$|A|^2 = |A_1 + A_2|^2$

$|A_{fi}|^2 \propto |\alpha|^2 \propto \alpha^2$



sWW: Neutrino kann nur in Lepton seiner Familie zerfallen
Neutrinos können nur mit der sWW interagieren
Quarks können über sWW Generation diagonal (oder gleich)

Lamb-Shift:



"Vakuumpolarisation"
Laufende Kopplungskonstante: $\alpha(q^2)$
$\Rightarrow$ Elektron ist von Wolke aus virtuellen e^+e^- umgeben $\Rightarrow$ Abschirmung $q^2 \to 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{137}$

Wirkungsquerschnitt

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit einer Streureaktion

Targetdichte $\boxed{n_t = \frac{\rho N_A}{M_{mol}}}$ $\left[\frac{\text{Kerne}}{\text{m}^3}\right]$

Teilchenfluss $\phi = \frac{\dot N_i}{A}$ $\left[\frac{\text{Teilchen}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}\right]$

$\hookrightarrow \dot N_i = \left[\frac{\text{Teilchen}}{\text{s}}\right]$

 # Streuzentren $N_t = n_t A d$

Streurate $\boxed{\dot N_s = \phi N_t \cdot\sigma = \dot N_i n_t d\cdot\sigma}$ $\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$

Wirkungsq. $\boxed{\sigma = \frac{\dot N_s}{\phi N_t}}$ $[\text{cm}^2, \text{b}]$ $(\dot N_s = \phi N_t A_t)$

Luminosität $\boxed{\mathcal L = \phi N_t}$ $\left[\frac{1}{\text{cm}^2\cdot\text{s}}\right]$

$N_s = \mathcal L_{int}\cdot\sigma \quad \mathcal L_{int} = \int_T \mathcal L\, dt \quad \boxed{\dot N_s = \mathcal L\cdot\sigma}$

geom. σ $\boxed{\sigma = 4\pi R^2} \Rightarrow \boxed{R = 1{,}2\,\text{fm}\cdot A^{1/3}}$

freie Weglänge $\lambda = \frac{1}{n_t\sigma}$

totaler σ $\sigma = \int_{4\pi}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega$

endlicher Raumwinkel $\boxed{\dot N_s = \dot N_i\frac{N_t}{A}\frac{d\sigma}{d\Omega}\Delta\Omega}$

$\boxed{\Delta\Omega = \frac{A}{R^2}}$ $\quad \sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega}\cdot\Delta\Omega \quad \dot N_s = \mathcal L\cdot\sigma$

collider $\dot N_s = ((v_1 + v_2)n_1 n_2 V)\sigma$

$\mathcal L = f_u n\frac{N_1 N_2}{A}$ $\quad$ n: # Paket, N: # pro Paket

$f_u = \frac{v}{u} \approx \frac{c}{u}$

fixed-target $\mathcal L = \dot N_i n_t d$

$1\,\text{b} = 10^{-28}\,\text{m}^2 = 10^{-24}\,\text{cm}^2$

Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

Halbwertszeit $T_{1/2} = \tau\ln 2$ — Branching ratio

Zerfallsbreite $\Gamma = \hbar/\tau$

Partialbreiten $\Gamma_i = B_i\cdot\Gamma$

$\frac{1}{\tau} = \frac{\Gamma_{fi}}{\hbar} = \omega_{fi};\ \sigma = \frac{V}{v}\cdot\omega_{fi}$

$N = \frac{V\int d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int\frac{p E}{c^2}dE\int d\Omega$

Fermis Goldene Regel $\boxed{\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|A_{fi}|^2\rho(E_f)}$ $\quad \boxed{\sigma_S \propto \frac{1}{s} = \frac{1}{E_{cms}^2}}$

Heisenberg $\Delta x\cdot\Delta p \ge \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E\cdot\Delta t = \hbar$

$\sim(1 + \cos^2\theta)$-Verteilung $\Rightarrow$ Austausch von $S=1$-Teilchen

		Fermionen I	Fermionen II	Fermionen III	Bosonen	
QUARKS	m / q / s	2,16 MeV/c², 2/3, 1/2, **u**	1,273 GeV/c², 2/3, 1/2, **c**	172,57 GeV/c², 2/3, 1/2, **t**	0, 0, 1, **g**	125,2 GeV/c², 0, 0, **H**
QUARKS		4,7 MeV/c², −1/3, 1/2, **d**	−1/3, 1/2, **s**	−1/3, 1/2, **b**	0, 0, 1, **γ**	
LEPTONEN		0,511 MeV/c², −1, 1/2, **e**	105,66 MeV/c², −1, 1/2, **μ**	1,777 GeV/c², −1, 1/2, **τ**	91,188 GeV/c², 0, 1, **Z**	
LEPTONEN		<0,8 eV/c², 0, 1/2, **ν_e**	<0,17 MeV/c², 0, 1/2, **ν_μ**	<18,2 MeV/c², 0, 1/2, **ν_τ**	80,37 GeV/c², ±1, 1, **W**	

WW-Teilchen und Materie

$\Rightarrow$ Ionisation durch Coulomb

geladene Teilchen:

Bethe-Bloch $\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle_{ion} = -\left(\rho N_A\frac{Z}{A}\right)4\pi r_e^2 m_e c^2 z^2\frac{1}{\beta^2}\left(\ln\frac{2m_ec^2\gamma^2\beta^2}{I} - \beta^2\right)$ — I: mittl. Anregungsenerg.

$\frac{1}{\rho}\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle = -\frac{K}{A}z^2 Z\frac{1}{\beta^2}\left(\ln\frac{2m_ec^2\gamma^2\beta^2}{I} - \beta^2\right)$

$\sim z^2$: Ladung Teilchen $\qquad \frac{1}{\rho}\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle = 1{,}1\,\frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}$

$\sim\frac{1}{\beta^2}$: mehr Energieverlust wenn langsam

- minimum ionizing particle (MIP): $\beta\gamma \approx 3{,}5$ Minimum des Energieverlusts
- für $\beta\gamma$ klein $\sim\frac{1}{\beta^2}$
- für $\beta\gamma > 3{,}5$ Logarithmischer Anstieg
- wenn p und $\frac{dE}{dx}$ gemessen $\Rightarrow M = \frac{p}{\beta\gamma c}$ — Massenbestimmung über Bethe-Bloch

Bragg-Peak $\Rightarrow$ Tumorbehandlung
erst $\beta \approx 1 \Rightarrow$ verlangsamt $\Rightarrow \frac{dE}{dx}$ größer $\Rightarrow$ großer Peak am Ende vor Ruhe

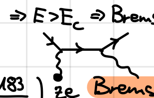
Energieverlust von Elektronen

$\boxed{\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle = \left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle_{ion} + \left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle_{Brems}}$

kritische Energie $E_c \approx 610\,\text{MeV}/(Z + 1{,}2)$

$\hookrightarrow$ Brems = Ion $\Rightarrow$ für Blei ab 10 MeV $\Rightarrow E > E_c \Rightarrow$ Brems

$\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle_{Brems} = -\frac{1}{X_0}E \qquad \boxed{E(x) = E_0 e^{-x/X_0}}$



Bremsstrahlung

Strahlungslänge $\frac{1}{X_0} = \rho N_A\frac{Z^2}{A}\cdot 4\alpha\cdot r_e^2\cdot\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right)$

$\hookrightarrow$ Länge nach der $1 - e^{-1}$ an E verloren sind

Cherenkov-Strahlung $v > \frac{c}{n}$ / $\boxed{\beta > \frac{1}{n}}$

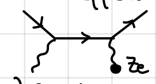
Kegel mit Öffnungswinkel Θ: $\cos\Theta = \frac{1}{\beta n}$

WW von Photonen mit Materie

Absorption $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$

$\mu = \mu_{Ph} + \mu_{Comp} + \mu_{Paar}$

1) Photoeffekt ($E < 1$ MeV)



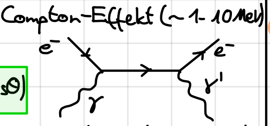
Compton $E_\gamma' = E_\gamma\frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_ec^2}(1 - \cos\theta)}$ $\quad \frac{E_\gamma}{m_ec^2} = \varepsilon$

$E_{\gamma\,min}' = \frac{E_\gamma}{1 + 2\varepsilon}$

$E_{kin}^e|_{max} = E_\gamma\frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \qquad \boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta)}$

$E_{kin,e^-} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$

2) Compton-Effekt ($\sim$ 1–10 MeV)

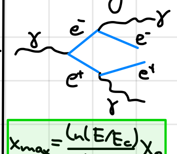


Paarbildung

$I(x) = I_0\exp\left(-\frac{7}{9}\frac{x}{X_0}\right) \quad \lambda_{Paar} = \frac{9}{7}X_0$

3) Paarbildung (> 10 MeV)

elektromagnetische Schauer



Brems: $e^- \to e^- + \gamma$
Paar: $\gamma \to e^- + e^+$

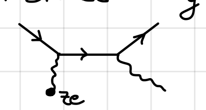
$E_n = \frac{E}{2^n}$

$x_{max} = n\cdot X_0$

Abbruch: $E_n \approx E_c$ $\hookrightarrow$ Ionisation statt Bremsstrahlung

$\boxed{x_{max} = \frac{\ln(E/E_c)}{\ln 2}X_0}$

$\Rightarrow$ Bremsstrahlung



hadronische Schauer $\Rightarrow$ über starke WW (mit Atomkernen-Material)
$\Rightarrow$ hochenergetisches Hadron trifft auf Atomkern und erzeugt neue sekundäre Hadronen und Kernfragmente z.B. $\pi^+ + A \to ?$

hadr. WW-Länge $\lambda_{ww} = \frac{1}{n\cdot\sigma_{ww}} = \frac{A}{\rho N_A}\cdot\frac{1}{\sigma_{ww}}$ — für hochenerg: $\sigma_{ww} \approx 35\,\text{mb}\,A^{0{,}7}$

$\Rightarrow$ hadr. Schauer in Materie, Jet im Vakuum

Detektoren

Spurdetektoren: misst Spur & Impuls; Energieverlust durch Bethe-Bloch
Impuls über B-Feld: $p_\perp = q\cdot B\cdot R$

ECAL: Energiemessung von Elektronen und Photonen $\quad N \propto E,\ \Delta N \propto \sqrt N$
HCAL $\hookrightarrow$ elektromagn. / hadronische Schauer $\quad$ **Auflösung** $\frac{\Delta E}{E} = \frac{C}{\sqrt E}$

e^-: Spur im Tracker, deponiert gesamte Energie im ECAL

γ: keine Spur im Tracker, deponiert gesamte Energie im ECAL

Hadron (gel.): Spur im Tracker, E teilweise im ECAL, ausgedehnter Schauer im HCAL

Hadron (neutral): keine Spur, Schauer im HCAL

μ^-: Spur im Tracker, nur minimale Ionisation in CAL, Spur in Myon-Kammer (außen)
$\boxed{\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle_{Brems} \propto 1/m^2}$ $\Rightarrow$ da μ^- schwer $\Rightarrow$ nur Ionisation

ν: keine WW mit Detektor $\Rightarrow$ nur "fehlende E und p"

Symmetrien und Erhaltungssätze

$\Rightarrow$ zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine physikalische Erhaltungsgr.

Erhaltungsgröße: $[\hat H, \hat Q] = 0 \Rightarrow$ Erwartungswert nicht zeitabh.

Symmetrietrafo: $\hat H = \hat U\hat H\hat U^{-1} \Leftrightarrow [\hat H, \hat U] = 0$

1) **elektrische Ladungserhaltung** $\hat Q|e^\pm\rangle = \pm|e^\pm\rangle$

2) **Leptonenzahlerhaltung** $\sum_i L_{i,ges} = \text{const};\ \sum_i L_{i,e} = \text{const}$
Teilchen: positiv, Antiteilchen: negativ $\quad \sum_i L_{i,\mu} = \text{const};\ \sum_i L_{i,\tau} = \text{const}$
$\Rightarrow$ Ausnahme: Neutrinooszillation (aber L_{ges} = erhalten)

3) **Baryonenzahlerhaltung** $\tilde B = \frac{n_q - n_{\bar q}}{3}$
Baryonen: $\tilde B = +1$; Antibaryonen: $\tilde B = -1$

	I	I_3
u	1/2	+1/2
d	1/2	−1/2
p	1/2	+1/2
n	1/2	−1/2
s	0	0
c	0	0

4) **Isospin** $\Rightarrow$ em. WW bricht Isospin-Symmetrie, Massenunterschied zwischen p und n ebenso

5) **Strangeness** $\boxed{S(s) = -1,\ S(\bar s) = +1}$

	K^0	$\bar K^0$	K^+	K^-	Λ	$\bar\Lambda$
S	+1	+1	+1	−1	−1	+1

Majorana-Fermionen: $\bar f = f \Rightarrow$ muss elektrisch neutral

Zerfallsbreite $\Gamma = 2\pi\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p_1}{c^2}\frac{E_1 E_2}{m_A^2c^2}\int|A_{fi}|^2 d\Omega_1$

Teilchen	Quarks	$\tilde B$	I	I_3	S
p	uud	+1	1/2	+1/2	0
n	udd	+1	1/2	−1/2	0
Δ^{++}	uuu	+1	3/2	+3/2	0
Δ^+	uud	+1	3/2	+1/2	0
Λ^0	uds	+1	0	0	−1
Σ^+	uus	+1	1	+1	−1
Σ^0	uds	+1	1	0	−1
Σ^-	dds	+1	1	−1	−1
π^+	$u\bar d$	0	1	+1	0
π^0	$\frac{u\bar u - d\bar d}{\sqrt 2}$	0	1	0	0
π^-	$d\bar u$	0	1	−1	0
K^+	$u\bar s$	0	1/2	+1/2	+1
K^0	$d\bar s$	0	1/2	−1/2	+1
K^-	$s\bar u$	0	1/2	−1/2	−1
ϕ	$(s\bar s)$	0	0	0	0
J/ψ	$c\bar c$	0	0	0	0

$\Rightarrow$ höchste Ladung $\Rightarrow$ höchste Isospin-Projektion (I_3)

π^+, π^0, π^-: $S = 0$ $\quad \Rightarrow \rho^+, \rho^0, \rho^-$: $S = 1$

Tool: welche WW?

1) nur Hadronen $\Rightarrow$ ggf. starke WW
$\hookrightarrow$ wenn Leptonen oder Photonen beteiligt $\Rightarrow$ nicht stark

2) min. ein geladenes Teilchen $\Rightarrow$ ggf. em WW
$\hookrightarrow$ Neutrinos (Ausnahme: Schleifen) $\Rightarrow$ nicht em.

3) sonst schwach testen

em. WW: koppelt an Teilchen mit Ladung $\Rightarrow$ keine Neutrinos
starke WW: koppelt nur an Teilchen mit Farbladung
schwache WW: einzige Kraft, die den Flavor ändern kann

WW	em.	stark	schwach
Q	✓	✓	✓
$L_{ges}, L_e, L_\mu, L_\tau$	✓	✓	✓
$\tilde B$	✓	✓	✓
I	✗	✓	✗ Vektor
I_3	✓	✓	✗
S	✓	✓	✗
C	✓	✓	✗ max
P	✓	✓	✗ max
T	✓	✓	(✗)

	C	P	T
$\vec r$	+	−	+
$\vec p$	+	−	−
$\vec L$ oder $\vec S$	+	+	−
Helizität $h = \vec L\cdot p$	+	−	+
q	−	+	+
$L, L_{e,\mu,\tau}$	−	+	+
$\tilde B$	−	+	+
Farbladung	−	+	+
I_3	−	+	+
$\vec E$	−	−	+
$\vec B$	−	+	−

~~1s~~
~~2s 2p~~
~~3s 3p 3d~~
~~4s 4p 4d 4f~~
~~5s 5p 5d 5f~~ …
~~6s 6p 6d~~ … … …

s: 2
p: 6
d: 10
f: 14

$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\tilde B + S)$ **Gell-Mann-Nishijima**

$\to \eta \to \pi^0$ ist verboten $\Rightarrow$ E- und p-Erhaltung

Diskrete Transformationen

$\Rightarrow$ multiplikative Quantenzahlen

P-Parität $\vec r \xrightarrow{P} -\vec r;\ \vec p \xrightarrow{P} -\vec p;\ \vec L = \vec x\times\vec p \xrightarrow{P} \vec L$

für $T \to 1 + 2$: $\boxed{\eta_P(T) = \eta_P(1)\cdot\eta_P(2)\cdot(-1)^l}$

Wu-Experiment: ${}^{60}\text{Co} \to {}^{60}\text{Ni}^* + e^- + \bar\nu_e$ & Spin polarisiert
$\hookrightarrow$ mehr e^- detektiert, mit $\vec p_e$ entgegen Kernspin ($J = S$)

$\Rightarrow$ Helizität: Projektion des Spins auf seine Impulsrichtung

$H = \frac{\vec S\vec p}{|\vec p|}$ $\quad \boxed{\Rightarrow \text{sWW koppelt an LH Teilchen } (H = -\tfrac{1}{2}) \text{ (Spin entgegen Flugrichtung)}}$

für Fermion: $H = \pm\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Fermionen: LH, Anti-F: RH

C-Parität $\hat C|\text{Teilchen}\rangle = \eta_C|\text{Antiteilchen}\rangle$

CP-Symm. in sWW scheinbar erhalten $\quad \boxed{\pi^0 \to \gamma + \gamma,\ C\ {+1} = (-1)\cdot(-1)}$
$\Rightarrow$ aber verletzt durch $K^0 \to \pi^+\pi^-$ & auch B-Mesonen

T-Parität $t \xrightarrow{T} -t;\ \vec x \xrightarrow{T} \vec x$
$\hookrightarrow$ Suche nach elektr. Dipolmoment des Neutrons

CPT-Theorem $\Rightarrow$ alle WW sind invariant $\qquad S(\pi^0) = 0$

$\Rightarrow$ **J-Erhaltung** $J = |l - S|, \ldots, l + S$ — l: rel. Bahndrehimpuls

$\Rightarrow$ wir nehmen stets geringste Anzahl an Teilchen an, die Erhaltungssätze erfüllt, da:
$\Rightarrow$ 2 Teilchen $\propto \alpha$
$\Rightarrow$ 3 Teilchen $\propto \alpha^2$

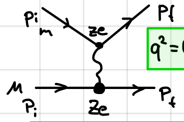
$\boxed{J^{PC}}$ $\to$ für einzelnes Teilchen is $J = S$

Rutherford
elastisch ⇒ $E_C = E_i$ ⇒ α-Teilchen auf Goldfolie (S=0)
⇒ winziger, positiver Kern, um den Elektronen kreisen

Rutherford Streuformel $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruther} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}(\hbar c)^2$ (S=0)

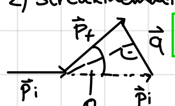
$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}(\hbar c)^2$ ↳ hochrel., $E_f \ll cp$, $E = E_C = E_i$

↳ nicht relat. $E_{kin} = \frac{1}{2}|\vec p_i|\beta_i c$



1) Streuamplitude $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |A_{fi}|^2 \sim \left(\frac{ze\,Ze}{q^2}\right)^2$ $q^2 = (p_i - p_f)^2$

2) Streukinematik $|\vec q| = 2|\vec p_i|\sin\frac{\theta}{2}$ für hochrelativistisch: $E_f \approx c|\vec p_f|$



⇒ $P(\theta = 180°) \neq 0$ ⇒ punktförmig, solange $\lambda = \frac{\hbar}{|\vec q|}$

Mott-Formel
⇒ Streuung von S=½-Elektronen

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruther}\cos^2\frac{\theta}{2}$ β≈1

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruther}\cdot\left(1 - \beta^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ β<1

⇒ unterdrückt Rückwärtsstreuung, da dies ein Spin-Flip wäre (Helizität muss erhalten sein)

Elektronenstreuung an ausgedehnten Kernen
Ladungsdichte $\rho(\vec r) = Ze f(\vec r)$ (Kern)

Formfaktor $F(\vec q) = \int f(\vec r)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec q\vec r\right)d^3r$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\cdot|F(\vec q^2)|^2$ $F = F(q^2)$ für $\rho = \rho(r)$

$\vec q \to 0$: $F(0) = 1$ Λ groß, Kern kann nicht aufgelöst werden

$\vec q$ groß: $|F(\vec q)| < 1$ ⇒ $F(q^2)$ nur in kleinen Bereich messbar ⇒ kein Fouriertrafo möglich

$R \approx 1{,}2\,\text{fm}\cdot A^{1/3}$

Räumliche Struktur der Nukleonen
anomales magnetisches Moment: g = 2 + QED-Korr

$\vec\mu_{p,n} = g_{p,n}\mu_N\frac{\vec S}{\hbar}$ ⇒ $g_p = 5{,}58$; $g_n = -3{,}82$

↳ innere Struktur

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruther}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2c^2M_p^2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$Q^2 = -q^2$ für θ>0: Dirac > Mott   Spin-Spin WW

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left(\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_M^2(Q^2)\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$

Rosenbluth-Formel

$\tau = \frac{Q^2}{4c^2M_p^2}$ ⇒ elektrische und magnetische Ausdehnung des Protons ist gleich

$G_E(Q^2) = \frac{G_M(Q^2)}{2{,}79}$ $G_E(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0{,}71\,\text{GeV}^2}\right)^{-2}$

Rosenbluth-Plot

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}\Big/\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau}}_{A(Q^2)} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2)}_{B(Q^2)}\cdot\tan^2\frac{\theta}{2}$

⇒ $y = A(Q^2) + B(Q^2)\cdot\tan^2\frac{\theta}{2}$

Tief-inelastische Elektron-Proton Streuung
⇒ bisher: elastisch, $E_i = E_f$ ⇒ nun: $\nu = E_i - E_f \neq 0$

⇒ Photon bricht nun auf in W   Rückstoßenergie

W = invariante Masse der Hadronen: $W^2c^4 = (P+q)^2$ $P = (Mc, 0)$

⇒ um inelastischen Prozess zu beschreiben benötigt man nun 2 Variablen ⇒ z.B. $\nu = E_i - E_f$ und $Q^2 = -q^2$

$W > M_p$ ⇒ inelastisch

Bjorken-Variable $x = \frac{Q^2}{2Mc^2\nu} = \frac{Q^2}{2P\cdot q}$

elastisch: x = 1   inelastisch: x < 1   ⇒ x ist Maß für Elastizität

$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_f} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\frac{1}{\nu}\left(F_2(Q^2,x) + F_1(Q^2,x)\frac{Q^2}{xM^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$

Bjorken-Scaling: $F_1(Q^2,x) = F_1(x)$, $F_2(Q^2,x) = F_2(x)$ bei festem x unabh. von Q^2

⇒ Summe von elastischen Streuungen an punktförmigen Bestandteilen im Proton ⇒ Partonen

⇒ außerdem $F_2(x) = 2xF_1(x)$ ⇒ e⁻ haben S = ½

Callan-Gross-Relation

für $m_e \approx 0$ ⇒ $Q^2 = 2E_iE_f(1 - \cos\theta)$

Parton-Modell

⇒ x entspricht dem Impulsanteil z des Partons vom p_{ges} des Protons im Infinite Momentum Frame

$\int F_2(x)dx \approx 0{,}5$ ⇒ 50% des Protonenimpulses müssen von den Gluonen getragen werden

Starke WW
Farbladungen: $r\bar g, r\bar b, g\bar r, g\bar b, b\bar r, b\bar g, \frac{1}{\sqrt2}(r\bar r - g\bar g), \frac{1}{\sqrt6}(r\bar r + g\bar g - 2b\bar b)$

Wellenfunktion: $\psi = \psi_{Raum}\cdot\phi_{Flavor}\cdot\chi_{Spin}\cdot\xi_{Farbe}$

$\xi_{Farbe} = \frac{1}{\sqrt6}\sum_{ijk=\{r,g,b\}}\varepsilon_{ijk}u_iu_ju_k$ (uuu)

$\xi_{Farbe} = \frac{1}{\sqrt6}\left[|rgb\rangle + |gbr\rangle + |brg\rangle - |grb\rangle - |bgr\rangle - |rbg\rangle\right]$

$\sigma_{had} = \sigma_{\mu\mu}\cdot N_c\cdot\sum_{q_i}Q_{q_i}^2$ $N_c = 3$ $R_{had} = \frac{\sigma_{had}}{\sigma_{\mu\mu}} = N_c\sum_{q_i}Q_{q_i}^2$

Quark-Loops: Abschirmung

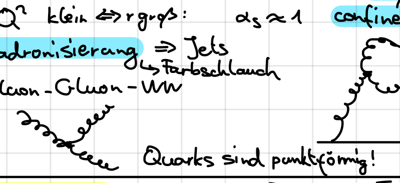
Gluon-Loops: Antiabschirmung (stärker für Q^2 klein)

$Q^2 \to \infty \Leftrightarrow r$ klein: $\alpha_s \to 0$ asymptotische Freiheit

Q^2 klein ⇒ r groß: $\alpha_s \approx 1$ confinement → Farbschlauch

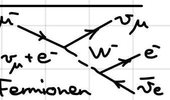
Hadronisierung ⇒ Jets ↳ Farbschlauch

Gluon-Gluon-WW



Quarks sind punktförmig!

Schwache WW
Propagator $\frac{1}{q^2 - M_W^2c^4}$ neutrale Ströme $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$ $\mu^- \to \nu_\mu + \bar\nu_e + e^-$



⇒ W-Bosonen koppeln nur an linkshändige Fermionen und rechtshändige Anti-Fermionen

⇒ Z-Bosonen können an beide koppeln ⇒ Kopplungsstärke verschieden ⇒ verletzt P- und C-Symmetrie

⇒ Universalität: Kopplungskonstante ist für alle Leptonengenerationen durch g_W gegeben

schwache Isospin-Dubletts:

$\begin{pmatrix}\nu_e\\e^-\end{pmatrix}_{LH}, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\\mu^-\end{pmatrix}_{LH}, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\\tau^-\end{pmatrix}_{LH}, \begin{pmatrix}u\\d'\end{pmatrix}_{LH}, \begin{pmatrix}c\\s'\end{pmatrix}_{LH}, \begin{pmatrix}t\\b'\end{pmatrix}_{LH}$ $T_3 = +\frac12$, $T_3 = -\frac12$ $\downarrow W^+ \uparrow W^-$

CKM-Matrix unitär $V_{CKM}\cdot V_{CKM}^{-1}$ $V_{CKM} = \begin{pmatrix}V_{ud} & V_{us} & V_{ub}\\V_{cd} & V_{cs} & V_{cb}\\V_{td} & V_{ts} & V_{tb}\end{pmatrix}$ $|A_{fi}|^2 \sim g_W^2|V_{qq}|^2$

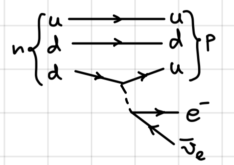
Zerfälle
Neutronenzerfall: $n \to p + e^- + \bar\nu_e$

β⁻-Zerfall: ${}^A_ZX \to {}^A_{Z+1}Y + e^- + \bar\nu_e$

β⁺-Zerfall: ${}^A_ZX \to {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e$

α-Zerfall: ${}^A_ZX \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He$

e⁻-Einfang: ${}^A_ZX + e^- \to {}^A_{Z-1}Y + \nu_e$



β-Zerfall: kontinuierliches Energiespektrum ⇒ 3-Körper-Zerfall ⇒ Neutrino

Kerne und Kernzerfälle
Bindungsenergie: Massendefizit ⇒ positiv definiert

$B(A,Z) = (Z\cdot m_p + (A-Z)\cdot m_n - M(A,Z))\cdot c^2 > 0$

für Stabilität entscheidend ist $\frac{B}{A}$

⇒ max. für Fe mit 8,8 MeV pro Nukleon

⇒ man kann auch Atommassen nehmen, muss aber auch statt $Z\cdot m_p$ dann $Z\cdot(m_p + m_e)$ verwenden

Massenspektrometrie $\frac{m}{q} = R\cdot\frac{B_1B_2}{E}$ / $\omega_c = \frac{q}{m}\cdot B$ N = A − Z

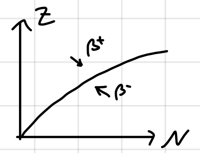
Bethe-Weizsäcker-Formel

$B(A,Z) = a_VA - a_OA^{2/3} - a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_S\frac{(N-Z)^2}{A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$ Kernkraft

1) Volumenbeitrag a_VA: WW der Nukleonen mit Nachbarn
2) Oberflächeneffekt $-a_OA^{2/3}$: Nukleonen an Oberfläche sind schwächer gebunden
3) Coulomb-Abstoßung $-a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}}$: verringert die Bindungsenergie
4) Symmetrie-Term $-a_S\frac{(N-Z)^2}{A}$: leichte Kerne sind bei N≈Z am stabilsten, für schwere bei N>Z
5) Paarungsterm $\frac{\delta}{A^{1/2}}$: gerade Anzahl von Protonen oder Neutronen erhöhen Kernstabilität

$\delta = \begin{cases}+11{,}2\,\text{MeV} & \text{gg-Kerne (Z gerade, N gerade)}\\ 0\,\text{MeV} & \text{ug-Kerne}\\ -11{,}2\,\text{MeV} & \text{uu-Kerne}\end{cases}$

schwere Kerne benötigen Neutronenüberschuss um wachsende Coulomb-Abstoßung der Protonen zu kompensieren



β⁺: $p \to n + e^+ + \nu_e$ / EC: $p + e^- \to n + \nu_e$

β⁻: $n \to p + e^- + \bar\nu_e$

Isobare (A=const) aufgetragen gegen Z ↳ Massenparabel ↳ Minimum: am stabilsten

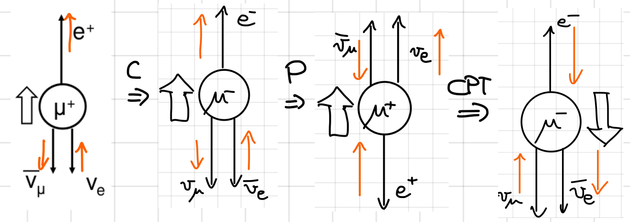
↳ für A gerade: jeweils eine Parabel für uu und gg ⇒ um $2\cdot\frac{11{,}2}{A^{1/2}}$ MeV verschoben

Bindungsenergie ist immer positiv! Bindung setzt Energie frei, zum Lösen ist Energie erforderlich!

Lepton-Universalität: Kopplungsstärke einer WW ist identisch für alle Generationen an Leptonen

Altklausuraufgaben
CPT-Theorem

LH: Spin entgegen Flugrichtung
RH: Spin parallel zu Flugrichtung
für sWW: LH Fermionen, RH Anti-Fermionen

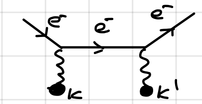


⇒ aus CPT-Theorem folgt: Teilchen und Antiteilchen müssen exakt gleiche Masse und Lebensdauer haben

Herleitung elastische Elektronenstreuung

1) E_e' durch $\vec p_K = (\vec p_e - \vec p_e')$ ausdrücken + $p_e = \frac{E}{c}$

Kopplung an Kern



Auflösung $\Delta x = \frac{\hbar c}{|q|c}$ $q = (\vec p_e - \vec p_e')_{max} = p_e + p_e' = \frac{1}{c}(E + E')$

Symmetrie der Gesamtwellenfkt.

$\psi_{ges} = \psi_{Farbe}\cdot\phi_{Flavor}\cdot\chi_{spin}\cdot\xi_{Farbe}$

ξ_{Farbe}: immer antisymmetrisch
ϕ_{Flavor}: abh. von Teilchen ⇒ sym. für 3 gleiche Quarks
ψ_{Raum}: L (L=0 ⇒ sym. für Baryonen im Grundzustand)
χ_{spin}: S

Rutherford: Teilchen: punktf., geladen (z.B. α), S=0, v≪c, nur Coulomb; Target: punktf., gel. S=0, unendlich schwer

Mott-Formel: Teilchen: punktf., relativistisch, S=½; Target: punktf., gel., S=0, kein Rückstoß

Rosenbluth: Teilchen: wie Mott; Target: räumliche Ausdehnung (G_E, G_M), Rückstoß, kann Spin haben

Radius von Atomkern ermitteln

1) schieße hochenergetische Elektronen auf Atomkern
2) messe Beugungsmuster
3) Radius aus Position des 1. Minimums berechnen

$|q| = 2\cdot|p|\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2E_i\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ⇒ $4{,}5 \approx \frac{|q|\cdot R}{\hbar}$ ⇒ $R = \frac{\hbar c\cdot 4{,}5}{c\cdot|\vec q|}$

Schwellenbedingung für Erzeugung von Quarkpaaren

$\sqrt{s} = E_{CMS} \geq 2\cdot m_qc^2$

Hadronischer Schauer ⇒ Materie

Hadronisierung ⇒ Vakuum

α-Zerfall ⇒ schwere Kerne (A>200) ⇒ Abtrennung ⇒ Energiegewinn

$V_{Coulomb}(r) = 2(Z-2)\frac{\alpha\hbar c}{r}$ ⇒ Durchtunneln durch Coulomb-Barriere

Transmission $T = e^{-2G}$; $G \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$

$\frac{1}{\tau} \sim e^{-2/\sqrt{E_\alpha}}$; $\log t_{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$

⇒ 4 verschiedene (3 aktive) Zerfallsreihen durch A = 4n, 4n+1

Kernspaltung → viel seltener als α ⇒ Tunnelwahrscheinlichkeit für α (leichter) größer

spontane Spaltung: $\frac{Z^2}{A} > 51$ → ab Z = 100
↳ Tunneln ⇒ sehr selten

Stoßinduzierte Spaltung: z.B. Neutronenbeschuss: $n + {}^{235}U \to {}^{236}U^*$
↳ Aktivierungsenergie → $E_{kin,n}$ + Bindungsenergie werden frei

ug → gg: es wird Paarungsenergie frei ⇒ ${}^{235}U \to {}^{236}U^*$

gg → ug: es muss Paarungsenergie hinzugefügt werden

Kettenreaktion: ν·η; $k_{eff} > 1$
↳ kritische Masse: minimale Masse spaltbares Material

→ σ größer ⇒ erhöht Effizienz für $k_{eff} \geq 1$ $k_{eff} > 1$: Bombe; $k_{eff} = 1$: Reaktor

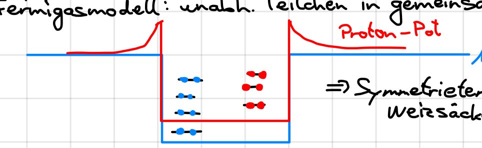
Moderator: bremst Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten ab + Kühlung

Reaktorregelung: Steuerstäbe, die thermische Neutronen stark absorbiert ⇒ rein-/rausfahren ⇒ verzögerte Neutronen (1%) ⇒ wichtig für Regelbarkeit

k_{eff}: pro Spaltung freigesetzte Neutronen setzen neue Spaltung in Gang

Tröpfchenmodell: Nukleon WW stark miteinander

Fermigasmodell: unabh. Teilchen in gemeinsamen Potential



⇒ Symmetrieterm in Bethe-Weizsäcker-Formel

Zerfall des Δ-Baryons
$|\frac32, -\frac12\rangle \to |\frac12, \pm\frac12\rangle$ & $|1, 0/-1\rangle$

↳ jeweils Nukleonen und Pionen koppeln

$I = \frac32$, $I_3 = +\frac12 - 1 = -\frac12$, $I_3 = -\frac12 + 0 = -\frac12$

⇒ $|\frac32, -\frac12\rangle = a|p\rangle|\pi^-\rangle + b|n\rangle|\pi^0\rangle$ $R = \frac{CGC^2}{CGC^2}$

Isospin

I) $p + p \to d^+ + \pi^+$ $|1,+1\rangle \to |1,+1\rangle$

II) $p + n \to d^+ + \pi^0$ $|1,0\rangle \to |1,0\rangle + |1,+1\rangle$

⇒ $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{|\langle I=1,I_3=0|A_{WW}|pn\rangle|^2}{|\langle I=1,I_3=1|A_{WW}|pp\rangle|^2} = \frac{|\langle I=1,I_3=0|pn\rangle|^2}{|\langle I=1,I_3=1|pp\rangle|^2} = \frac12$

minimale E_{kin} für zentrale Kollisionen:

$E_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{r} = E_{kin,min}$

Wasserstoff Wellenfunktionen

$P(r) = |\psi_{n,l,m}|^2$; Bed. $\frac{d}{dr}P(r) = 0 \Rightarrow r = a_0$ $\langle r\rangle = \int_0^\infty r P(r)dr = \frac32 a_0$

jj-Kopplung ns^1nd^1

⇒ $l_1 = 0, s_1 = \frac12, l_2 = 2, s_2 = \frac12$ ⇒ $(\frac12,\frac32)_1, (\frac12,\frac52)_2, (\frac12,\frac32)_2, (\frac12,\frac52)_3$

geometrischer Streuquerschnitt

1) e⁻ auf Kern: $\sigma = \pi R_K^2$
2) p auf Kern: $b \leq R_p + R_K$ ⇒ $\sigma = \pi\cdot(R_p + R_K)^2$
3) 2 identische Teilchen: $b_{max} = 2\cdot R_p$ ⇒ $\sigma = 4\pi R_p^2$

2e⁻ mit L=2, n=3 ⇒ mögl. Zustände berechnen

1) S = 0,1   L = 0,1,2,3,4
2) Symmetrie anwenden ⇒ sym: S=1, L=0,2,4; asym: S=0, L=1,3
3) erlaubte Zustände: ³P, ³F, ¹S, ¹D, ¹G
4) J berechnen J = |L−S|, L+S ⇒ ${}^1S_0, {}^3P_{1,2,3}, {}^1D_2, {}^3F_{2,3,4}, {}^1G_4$

Zerfallsraten und Fermis Goldene Regel

$\Gamma \propto |A_{fi}|^2\cdot\rho(E)$ ⇒ wenn $|A_{fi}|^2$ gleich: je größer der Impuls der Endprodukte, desto größer ρ(E)

für sWW: $B_e = \frac{g_W^2}{\sum g_W^2}$ ⇒ Farbkanäle zählen

Rate: $\omega = \frac{\Gamma}{\hbar}$ für Zerfall; ω∝σ für Streuung   Rate ∝ $|A_{fi}|^2\cdot\rho(E)$

Verhältnis σ (gleiche Energie) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{N_{C1}\cdot Q_1^2}{N_{C2}\cdot Q_2^2}$

Verhältnis σ (gleiche Prozess, E versch.) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{s_2}{s_1}$

Verhältnis Γ (gleiche Dynamik) $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\rho(E_1)}{\rho(E_2)} \approx \frac{p_1}{p_2}$

Relativistische Kinematik
Zwei-Teilchen-Zerfall $M \to m_1 + m_2$ (im Ruhesystem von M)

I) $Mc^2 = E_1 + E_2$ $E_1^2 = m_1^2c^4 + p^2c^2$

II) $0 = \vec p_1 + \vec p_2$ ⇒ $|\vec p_1| = |\vec p_2| = p$ $E_2^2 = m_2^2c^4 + p^2c^2$

⇒ $E_1^2 - E_2^2 = c^4(m_1^2 - m_2^2) = \underbrace{(E_1 + E_2)}_{Mc^2}(E_1 - E_2)$ ↳ $E_2 = Mc^2 - E_1$

⇒ $E_1 = c^2\frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}$

Energie im Laborsystem berechnen

I) $E' = c\gamma(E/c + \beta p_x)$ $\gamma = \frac{E_A}{m_Ac^2} = \sqrt{1 + \frac{p_A^2c^2}{m_A^2c^4}}$; $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

II) $p_x' = \gamma\left(p_x + \beta\frac{E}{c}\right)$ $p_x = p_e\cdot\cos(\theta)$

Schwellenenergie bestimmen $s_{Lab} = s_{CMS}$

z.B. $p_1 + p_2 \to p_3 + p_4 + p_5$

im Lab: $p(p_1) = (m_pc^2, 0)$; $p(p_2) = (E_2, \vec p_2c)$ ⇒ $s = (p(p_1) + p(p_2))^2$

im CMS: $p(p_3) = (m_pc^2, 0)$; $p(p_4) = (m_pc^2, 0)$; $p(p_5) = (m_pc^2, 0)$

⇒ $s = (p(p_3) + p(p_4) + p(p_5))^2$ ⇒ Invarianz von s

⇒ im Collider: $\sqrt{s} = m_Xc^2 = 2E_{beam}$

Zerfall eines bewegten Teilchens

Ruhesystem: $E_1 = \frac{m_Ac^2}{2}$; $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4}\,\frac{1}{c}$

$\gamma = \frac{E_{total}}{M_{total}}$; $E_{total} = E_A + m_pc^2$; $M_{total} = \sqrt{s}$; $p_{total} = p_1$

⇒ $E_{1,max}' = \gamma(E_1 + \beta p_1c)$; $E_{1,min}' = \gamma(E_1 - \beta pc)$

Zerfall A → 1 + 2 im Ruhesystem ⇒ Impulse berechnen

$p(A) = p(1) + p(2)$

↳ I) $m_Ac^2 = E_1 + E_2$ ⇒ $m_A^2c^4 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$

II) $0 = \vec p_1c + \vec p_2c$ ⇒ $|\vec p_1| = |\vec p_2| = p$

⇒ $p = c\sqrt{\frac{(m_A^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}{4m_A^2}}$ $p_{max}' = \gamma\left(p + \beta\frac{E_p}{c}\right)$ $p_{min}' = \gamma\left(-p + \beta\frac{E_p}{c}\right)$

⇒ Trafo aus Ruhesystem von A ⇒ $\gamma = \frac{E_A}{m_Ac^2}$

Zerfall orthogonal zur Flugrichtung: $p_{1,x}' = \gamma\left(0 + \beta\frac{E_p}{c}\right)$

$L = \gamma v\cdot\tau = \gamma\beta\cdot\tau\cdot c$

⇒ falls Endprodukte im CMS in Ruhe erzeugt werden, bewegen sie sich im Lab-Sys gemeinsam: $\gamma = \frac{E_K + E_2}{(m_2 + m_K)c^2}$

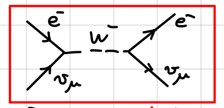
Öffnungswinkel transformieren:

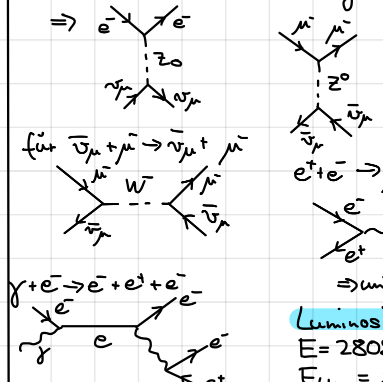
$p_y = \frac{m_Xc}{2}$ ⇒ $p_y' = p_y$ ⇒ $\frac{p_y}{p_z} = \tan(\theta)$

$p_z = 0$ $p_z' = \gamma\beta\frac{E}{c}$ ⇒ $\theta = \arctan\left(\frac{1}{\gamma\beta}\right) \approx \arctan\left(\frac{m_Xc}{E}\right)$ ↗ insbesondere für Photonen

$X \to \gamma + \gamma$: $m_Xc^2 = \sqrt{2E_1E_2(1 - \cos\theta)}$; $E_1 \approx p_{1,x}c$

Feynman
○ Fermionenlinien immer durchgehend





für $\bar\nu_\mu + \mu^- \to \bar\nu_\mu + \mu^-$

$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ (2. Ord)

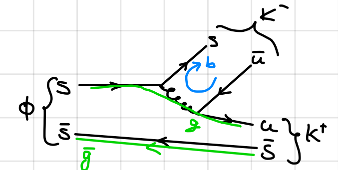
$\gamma + e^- \to e^- + e^+ + e^-$ ⇒ unterdrückt, da $\sim\alpha^4$

Luminosität am LHC

$E = 2808\cdot E_p\cdot N = 377{,}9\cdot10^6$ J

$E_{kin} = \frac12mv^2$ ⇒ $v = 494{,}9\,\frac{km}{s}$

Farbladung ⇒ Gluonen haben immer eine Farbe und eine Antifarbe



$a_V \approx 15{,}67$ MeV
$a_O \approx 17{,}23$ MeV
$a_C \approx 0{,}71$ MeV
$a_S \approx 23{,}3$ MeV

pp-Zyklus der Sonne → bestimmt Lebensdauer

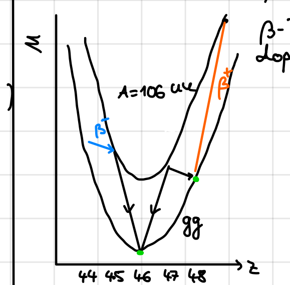
1) $p + p \to {}^2H + e^+ + \nu_e$ ⇒ schwach
2) ${}^2H + p \to {}^3He + \gamma$
3) ${}^3He + {}^3He \to {}^4He + p + p$

$\hbar c = 197$ MeV fm
$m_p = 938{,}27$ MeV
$m_n = 939{,}57$ MeV
$m_e = 511$ keV/c²

qualitative Änderungen $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

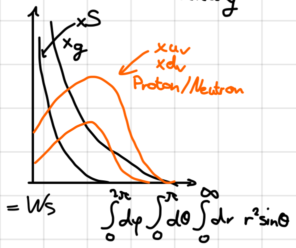
1) Z größer: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \propto Z^2$ ⇒ gesamte Kurve nach oben verschoben
2) Z gleich, A größer: Radius größer ⇒ engeres Beugungsmuster ⇒ 1. Min bei kleinerem θ
3) E_{kin} kleiner: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \propto \frac{1}{E^2}$ ⇒ größerer Wirkungsquerschnitt ⇒ Kurve verschoben nach oben ⇒ $\lambda = \frac{hc}{pc}$ größer ⇒ schlechtere Auflösung ⇒ Beugungsmuster breiter ⇒ 1. Min bei größerem θ
4) E_{kin} winzig: $\lambda_{De\text{-}Broglie}$ riesig im Vergleich zum Kernradius ⇒ F(q) ≈ 1 ⇒ Beugungsmuster verschwindet
5) E größer: $|q_{min}| \approx 4{,}5\cdot\hbar/R = 2\cdot E_i\cdot\sin(\theta_{min}/2)$ ⇒ θ_{min} kleiner

Zeeman-Effekt $\Delta E = \mu_Bg_Jm_JB$



β-Zerfall immer uu ↔ gg
doppelter β-Zerfall ist verboten

Parton-Verteilung



$A_{Kugel} = 4\pi R^2$ $J = \frac{kg\,m^2}{s^2} = Nm = Ws$ $\int_S d\varphi\int_\theta d\theta\int_r dr\,r^2\sin\theta$

Näherung: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ $\ln(a^b) = b\ln(a)$