Normalformspiele

Spieler $i = 1, \dots, n$

Strategien $s_i \in S_i$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$

Strategienvektor $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s \in S$

"alle Strategien außer von i"
$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$

Auszahlungsfunktion $U_i(s_1, \dots, s_n) = U_i(s_i, s_{-i})$

Gesamtspiel $G = \{S_1, \dots, S_n; U_1, \dots, U_n\}$

Gefangenen-Dilemma: wenn beide kooperieren, höhere Auszahlung als bei Defekt; wenn nur einer abweicht, bekommt dieser die höchste Auszahlung

	D	C
D	1,1	3,0
C	0,3	2,2

Def. strikte Dominanz **s_i' durch s_i''** $s_i', s_i'' \in S_i$
$U_i(s_i', s_{-i}) < U_i(s_i'', s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$
⇒ s_i'' ist strikt dominant, wenn $\forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i''$ strikt dominiert

Def. Nash-GGW $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ ist N-GGW falls: für jeden Spieler i, s_i^* eine bA gegen s_{-i}^* ist:
$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*)$, $\forall s_i \in S_i$
⇒ N-GGW darf nicht strikt dominiert sein
⇒ 2 Spieler gleichzeitig abweichen ist möglich

⇒ Stein-Schere-Papier hat kein N-GGW in reinen Strategien
⇒ Beauty Contest: $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}y + \frac{n-1}{n}x\right) = y \Rightarrow x = y \Rightarrow x = 0$

Def. Schwache Dominanz s_i' durch s_i'' schwach:
$U_i(s_i', s_{-i}) \leq U_i(s_i'', s_{-i})$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$
und es min. ein s_{-i} gibt, für dass die Ungleichung strikt ist
⇒ Nash-GGW können schwach dominiert sein
⇒ keine schwach dominierten Strategien wegstreichen

Cournot Wettbewerb
$s_i = q_i > 0$ ⇒ Spieler wählen simultan Mengen
Bertrand: $s_i = p_i > 0$ ⇒ S wählen simultan Preis

Gemischte Strategien

gemischte S. σ_i für Spieler i:
$\sigma_i(s_i) \geq 0$
$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$

Simplex Δ_i ⇒ Menge der gemischten Strategien

(Bsp. Matching Pennies)

		$\sigma_2(K)$: K	$1-\sigma_2(K)$: Z
$\sigma_1(K)$	K	1,-1	-1,1
$1-\sigma_1(K)$	Z	-1,1	1,-1

$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \cdot U_i(s)$

Def. (gemischte) strikte Dominanz s_i' durch σ_i
$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(s_i, s_{-i}) > U_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$

Def. gemischtes Nash-GGW $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$
für jeden Spieler i ist σ_i^* bA gegen σ_{-i}^*
⇒ $U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall \sigma_i \in \Delta_i$
⇔ $\boxed{U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i}$

⇒ gemischte Strategie kann nie besser sein als beste reine Strategie
⇒ jedes endliche Normalformspiel besitzt ein Nash-GGW (auch endlich viele reine Strategien ⇒ nicht Cournot)

⇒ Repo-Spiel der EZB
↳ Problem: S_i unbeschränkt

> falls zwei reine N-GGW
> ⇒ meist 3. gemischtes!

Def. (gemischte) beste Antwort σ_i^* ist bA für 1 auf σ_{-i}
falls: $U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_i \in \Delta_i$
⇒ in N-GGW spielen alle Spieler eine bA ⇒ $\sigma_i^* \in \underbrace{b_i(\sigma_{-i}^*)}_{\text{bA-Korrespondenz}}$
⇒ Nash-GGW sind Schnittpunkte in der bA-Korrespondenz

Nullsummenspiele

2-Personen-Normalformspiele mit $U_1(s_1, s_2) = -U_2(s_1, s_2)$
⇒ genauso für $U_1(s_1, s_2) - c = -U_2(s_1, s_2)$
⇒ im NS-Spiel will der andere Spieler einem übel

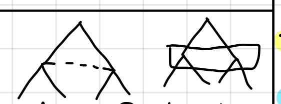
Sicherheitsstrategie / Max Min-Strategien
⇒ Maximum im Worst-case rausholen
$\min_{\sigma_2} \max_{s_1} U_1(s_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} U_1(\sigma_1, \sigma_2)$
$\max_{\sigma_1} \min_{s_2} U_1(\sigma_1, s_2) = \max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} U_1(\sigma_1, \sigma_2)$

Prop. $M_1 = \min_{\sigma_2} \max_{s_1} U_1(s_1, \sigma_2) \geq \max_{\sigma_1} \min_{s_2} U_1(\sigma_1, s_2) = m_1$

Prop. in Nullsummenspielen gilt: $M_1 = -m_2$

Theorem. in endlichen NS-Spielen $\exists (\sigma_1, \sigma_2)$:
$M_1 = m_1 = -m_2 = -M_2 \Rightarrow (\sigma_1, \sigma_2)$ ist N-GGW
⇒ (σ_1, σ_2) kann auch reines N-GGW sein

Dynamische Spiele (extensiv)



Informationsmenge:
↳ Entscheidungsknoten zwischen denen Spieler nicht unterscheiden kann

⇒ wenn Spieler i K Infomengen besitzt, mit $m_1, m_2, \dots, m_k$ Aktionen, ist die Anzahl seiner reinen Strategien s_i gg durch $|S_i| = m_1 \times \dots \times m_k$
⇒ Strategiemengen: $S_F = \{b, f\}$, $S_M = \{BB, BF, FF, FB\}$
↑ B wenn b, F wenn f

vollständig: vorher weiß jeder Spieler wie das Spiel aussieht ⇒ unvollständig
perfekt: alle Infomengen einelementig
perfect recall: Spieler vergessen nie

Ultimatumspiel ⇒ Responder irrational

Def. Teilspielperfektes GG
Nash-GGW ist teilspielperfekt, wenn GGW-Strategien in jedem Teilspiel ein Nash-GGW induzier

Rubinstein-Verhandlungen

⇒ Lsg. durch Rückwärtsinduktion ⇒ am Ende $(\delta, 1-\delta)$

Abdiskontierung $\delta = \frac{1}{1+r}$ ← Zinssatz
$r = 0, \delta = 1$ ⇒ geduldig
r hoch, δ gering ⇒ ungeduldig

⇒ $s_1^* = 1 - \delta(1 - \delta s)$
Rückwärtsinduktion + perfekte Info ⇒ TSP-GGW
⇒ unendlich oft: $s^* = \frac{1}{1+\delta}$
("first mover advantage"; $\delta \to 1$ ⇒ 50:50
↳ da alle ungeraden Runden gleich ⇒ keine neue Info

Wiederholte Spiele (Gefangenendilemma)

Auszahlung = Summe der Rundenauszahlungen
⇒ im Gegensatz zu Stackelberg beeinflusst man die 1. Runde nicht die 2.
⇒ 2 mal gleiches Spiel
⇒ in der letzten Runde wird das Nash-GGW gespielt

Satz: wenn endlich oft wiederholt und nur ein GGW
↳ TSP-GGW besteht nur aus Wiederholungen dieses GG

Nomenklatur: $G(T)$ ⇒ T Wiederholungen
$G = \{A_1, \dots, A_n; U_1, \dots, U_n\}$ ⇒ alle Spieler wählen simultan Aktion A_i
⇒ $s_i \in S_i$ Strategien im Gesamtspiel
⇒ $a_i \in A_i$ Aktionen (Strategien im Stufenspiel)

$s_1 = 0$ wird von jeder $s_1 \in (0, 10]$ strikt dominiert
$s_1 > 10$ wird von jeder $s_1 < 10$ strikt dominiert
NGGW: $s_1^* + s_2^* = 10$
⇒ für sequentiell: Rückwärtsinduktion
$s_1^* = 10$, $s_2^* = 0$

Unendlich oft wiederholte Spiele

$\delta = \frac{1}{1+r}$; $U_0 + \delta U_1 + \delta^2 U_2 + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U_t$

geom. Reihe: $\sum_{t=0}^{\infty} a^t = \frac{1}{1-a}$; $\sum_{t=1}^{\infty} a^t = \frac{a}{1-a}$

⇒ wir wollen Kooperation stärken

$\boxed{G(\infty, \delta)}$

	D	C
D	1,1	5,0
C	0,5	4,4

Trigger (Bestrafung)
- C solange der ander C
- wenn einmal D ⇒ immer D
↳ **Grimm-Trigger**

Historie $H_T = ((CC), \dots)$ ⇒ bis Runde T
⇒ Grim-Trigger ist TSP-NGG für $\delta \geq \frac{1}{4}$

Tit-for-Tat (Reziprozität)
- beginne mit C
- danach immer Gegenspieler kopieren

⇒ Nash-GGW für $\delta \geq 1/4$
⇒ muss auch "off equilibrium path" überprüft werden
(DD)
↳ (CD), … ⇒ $\delta \leq 1/4$
⇒ nur für $\delta = \frac{1}{4}$ ist Tit-for-Tat TSP-GG
⇒ im Allgemeinen nicht
⇒ Grimm vergibt nie, Tit-for-Tat schon
⇒ Tit-for-Tat lässt sich nicht ausbeuten, ist aber nett

Folk Theorem
Konvexe Hülle aller Auszahlungen

Durchschnittsauszahlung $(1-\delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U_t$
Sei $(e_1, \dots, e_n)$ Auszahlung im N-GG
Sei $(x_1, \dots, x_n)$ bel. erreichbare Auszahlung
⇒ wenn $x_i > e_i \ \forall i$: $\exists$ für δ nahe 1 ein TSP-GGW von $G(\infty, \delta)$ mit $(x_1, \dots, x_n)$ als Durchschnitts-Auszahlung
⇒ δ kann auch als Fortsetzungswahrscheinlichkeit interpretiert werden

One-stage-deviation principle
⇒ es reicht zu testen ob sich an einer Stelle eine Abweichung lohnt

Effizienzlöhne

Ann. 1: $y - e > w_0$ } führt zu $(0, w_0)$
Ann. 2: $w_0 > py$ }
⇒ unendliches Spiel
Historie: hoher Lohn, hoher Output
Arbeiter: $V_e = (w^* - e) + \delta V_e$
⇒ $V_e = \frac{w^* - e}{1 - \delta}$
⇒ $w^* = w_0 + e + \frac{1-\delta}{\delta(1-p)} e$

Statische Spiele mit unvollständiger Info

Harsanyi-Trick: unvollst. Info ⇒ imperfekt
$\{BB, BF, FF, FB\}$ ⇒ kein Typ möchte abweichen (θ_1, θ_2)

Bayesianisches Spiel
Typ von SP i $\theta_i \in \Theta_i$
Typenvektor $\theta = \{\theta_i\}_{i=1}^n$
Typen der anderen $\theta_{-i} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$
a priori-Verteilung der Typen $p(\theta_1, \dots, \theta_n)$
Auszahlungsfkt $U_i(s_1, \dots, s_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$
Belief von i $p_i(\theta_{-i} | \theta_i)$

Zeitliche Struktur
1) Zufall $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$
2) jeder Sp. kann $p_i(\theta_{-i} | \theta_i)$ berechnen da $p(\theta)$ allg. bekannt
3) Sp. wählen simultan $s_i \in S_i$
4) Auszahlung $U_i(s_1, \dots, s_n; \theta_1, \dots, \theta_n)$

Strategie $s_i(\theta_i)$ reine Strategien $\in \mathcal{S}_i$
↳ separierend, wenn alle Typen von i unterschiedliche Aktionen wählen
↳ pooling, wenn alle Typen von i die selbe Aktion wählen

Def. BN-GGW
⇒ optimale Strategie muss für jeden Typen Aktion wählen, die erwartete Auszahlung dieses Typen maximiert

Ordnungsstatistiken
Gleichverteilung auf $[0,1]$
Erwartungswert $E(v) = \frac{1}{2}$ → 2 mal ziehen
2 mal ziehen, E vom größeren Wert $E[v_1^{(2)}] = \frac{2}{3}$
$E[v_2^{(2)}] = \frac{1}{3}$; $E[v_1^{(2)}] = \frac{2}{3}$ ← höchster Wert

Revenue Equivalence Principle
⇒ alle Auktionen ergeben denselben Erlös (bei der $E[U]$ des Bieters mit $v_i = 0$ null ist)

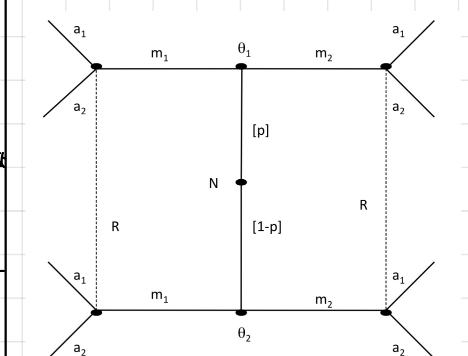
Bayes'sche Regel
Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit
$P(B) = \sum_i P(B|A_i) P(A_i)$
$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{P(B)}$

PB-GGW

auf dem GGW-Pfad: Info-Menge wird mit positiver Wahrscheinlichkeit mit GGW-Strategien erreicht ⇒ sonst "off-eq"

Signalspiele

1) Natur wählt Typ θ_s des Senders gemäß A-priori-Verteilung $p(\theta_s)$ ⇒ nur S kennt θ_s
$p(\theta_s) > 0$ und wie immer $\sum p(\theta_i) = 1$
2) S beobachtet seinen Typ θ_s und wählt Signal $m_j \in M$
3) Empf (R) beob. m_j ⇒ wählt Aktion $a_k \in A$
4) Auszahlungen $U_S(\theta_s, m_j, a_k)$ und $U_E(\theta_s, m_j, a_k)$



⇒ Sender: 2 Typen ⇒ 2x2 = 4 Strategien
↑ 2 Signale

1) $m(\theta_1) = m(\theta_2) = m_1$ } pooling
2) $m(\theta_1) = m(\theta_2) = m_2$ }
3) $m(\theta_1) = m_1$, $m(\theta_2) = m_2$ } separierend
4) $m(\theta_1) = m_2$, $m(\theta_2) = m_1$ }

kontinuierlich, sequentiell

Tool: Stackelberg Wettbewerb
Strategiemenge: $S_i \in [0, \infty)$
$s_i = q_i$ (wählt Menge), sequentiell
Firma 1: Stackelberg-Führer $q_1 \geq 0$ $[0, \infty)$
Firma 2: Stackelberg-Folger $q_2 \geq 0$
⇒ $q_2 = R_2(q_1)$
1) Nachfragefkt. aufstellen $P(q_i) = ?$
2) Kostenfkt. aufstellen $C_i(q_i) = ?$
3) $\pi_i = q_i P - C_i$ ⇒ $C_i = q_i \cdot c_i$
4) Rückwärtsinduktion
⇒ Annahme: Firma 1 wählt q_1
⇒ bA von F2: $\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = ?$
⇒ Bed. 1. Ord ⇒ $R_2(q_1) = q_2$
5) Firma 1 weiß wie Firma 2 reagiert
⇒ $\pi_1(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, R_2(q_1))$
⇒ $\max_{q_1} \pi_1 = ?$
6) q_1 in $R_2(q_1)$ einsetzen
⇒ Preis bei Stackelberg niedriger
7) Gewinne über π_i
$\boxed{\pi_1^S \geq \pi_1^C}$

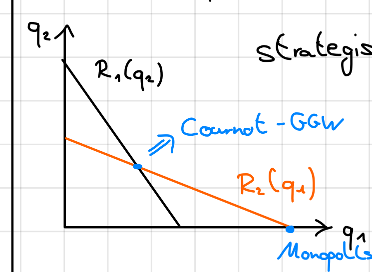
Überblick GGW-Konzepte

	perfekt	imperfekt
statisch	Nash-GGW	BN-GGW
dynamisch	TSP-GGW	PB-GGW

simultan, kontinuierlich

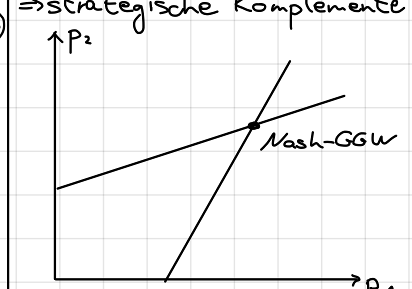
Tool: Cournot Duopol
1) Nachfragefkt aufstellen $p(q_1, q_2)$ (oder $p(p_1, p_2)$ ⇒ Bertrand)
2) Kostenfunktion aufstellen $C_i(q_i)$
3) Gewinnfunktion aufstellen für beide Firmen i
$\pi_i = pq_i - C_i(q_i)$ = Erlös − Kosten
oder $\pi_i = p \cdot p_i - C_i$ (Bertrand) $C_i = c \cdot q_i$
4) Maximierungsproblem von Firma 1 (für gg. q_2)
$\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2)$ ⇒ Bed 1. Ord: $\frac{d}{dq_1}\pi_1 = 0$
⇒ Reaktionsfunktion $R_1(q_2) = q_1 = \dots$
5) analog für Firma 2 durchführen
⇒ $R_2(q_1) = q_2 = ?$
6) GGW finden ⇒ q_2 in $R_1(q_2)$; q_1 in $R_2(q_1)$
7) Preis: q_1 und q_2 in p
8) Gewinne: p und q_i in π_i

strategische Substitute



Tool: Bertrand-Duopol
1) Nachfragefkt. $P(p_1, p_2)$
2) Kostenfkt. $C_i(q_i)$
3) Gewinnfkt $\pi_i = P \cdot p_i - C_i$ → $C_i = c \cdot p_i$!!!
4) Maximierungsproblem
$\max_{q_1} \pi_1(p_1, p_2)$ ⇒ Bed. 1. Ord: $\frac{d\pi_i}{dp_i} = 0$
⇒ Reaktionsfkt. $R_1(p_2) = p_1$
⇒ analog für Firma 2
5) GGW finden ⇒ p_2 in $R_1(p_2)$; p_1 in $R_2(p_1)$
6) Gewinne P und p_i in π_i
⇒ Nash-GGW (p_1^*, p_2^*)

⇒ strategische Komplemente



⇒ nach Nash's Existenztheorem besitzt jedes endliche Spiel min. ein N-GGW
↳ Gegenbsp. für unendlich: Bertrand-Wettbewerb muss kein N-GGW haben ⇒ immer Unterbieten
⇒ es haben fast alle endlichen Spiele eine ungerade Anzahl von N-GGW
⇒ in Nullsummen-Spielen ist N-GGW = Minimax-Pkt
↳ maxmin ist immer kleiner gleich Minimax
↳ nur in NS-Spielen sind sie dank Minimax-Theorem gleich

Sequentielle Spiele

Strategiemengen: Knoten pro Spieler zählen
#Strategiemengen = #Knoten · #s pro Knoten

Tool: Nash-GGW in Extensivform finden
1) feste Richtung wählen
2) prüfen ob die Spieler abweichen wollen
⇒ es kann jeweils nur einer abweichen

Tool: Rückwärtsinduktion
1) von unten starten und an jedem Knoten entweder beste Strategie wählen oder indifferent

⇒ eliminiert unglaubwürdiges Verhalten
2) Teilspiele müssen an einem Knoten starten
3) wenn im Teilspiel mehrere N-GGW
↳ mehrere Teilspielperfekte GGW

⇒ gemischte TSP-GGW:
$\sigma_1 = (p, 1-p, 0, 0)$ ⇒ zwischen reinen TSP-GGW mischen

Def. Teilspielperfektes GG
⇒ muss in jedem Teilspiel GGW sein

> ⇒ komplizierte sequentielle Spiele immer als Matrix schreiben

nützliche Facts:
⇒ schwach dominierte Strategien sind nie Teil eines gem. N-GGW
⇒ dominierte Strategien sind weder im N-GGW, noch in gemischten MaxMin-Strategien
⇒ wenn eine Strategie nie bA ist, muss sie strikt dominiert sein (ggf. durch Mischung)

Verständnisfragen

		q: L	1-q: R
p	U	1,1	0,0
1-p	D	1,0	0,1

(U,L) und (D,R) rein
$U_1(U, \sigma_2) = U_1(D, \sigma_2)$
$q = q$
$U_2(\sigma_1, L) = U_2(\sigma_1, R)$
⇒ SP 2 beliebig $p = 1-p$
↳ auch rein R oder L $p = \frac{1}{2}$ ⇒ $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Beispiele:

Gefangenen-Dilemma
↳ Sp erreichen im N-GG nicht immer bestes Ergeb.
↳ rationale SP kooperieren nicht immer, wenn es für beide besser ist

	C	D
C	2,2	0,3
D	3,0	1,1

(D,D)

Battle of Sexes
(B,B) und (F,F)
⇒ hat 3 NGGW
⇒ SP 1 bevorzugt (B,B)
SP 2 bevorzugt (F,F)

	B	F
B	2,1	0,0
F	0,0	1,2

Matching Pennies
⇒ kein reines N-GGW
⇒ nur gem. $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

	K	Z
K	1,-1	-1,1
Z	-1,1	1,-1

Maxmin: -1
Minimax: +1

Spiel mit schwacher Dominanz
rein: (U,L), (D,R)
↳ obwohl U schwach dominiert

	L	R
U	1,1	0,0
D	1,0	0,1

⇒ Folk-Theorem: falls keine Auszahlung existiert, besser als Bestrafung, die erreichbar sind:
⇒ nur ein GGW-Auszahlung

	L	R
U	5,5	0,0
D	0,0	0,0

⇒ PB-GGW können schwach dominierte Strategien enthalten
↳ seq. Rat. schließt das nicht aus
⇒ kontextabh. von Beliefs

	L	R
U	1,1	1,1
D	0,0	0,0

⇒ 2 NGGW ?

statische Spiele, perfekte Information

Tool: Eliminierung strikt dominierter Strategien
"common knowledge of rationality"
⇒ wenn nur eine Kombi über: eindeutiges N-GGW
⇒ Reihenfolge ist egal

Tool: Nash-GGW finden
1) für S_1 bA in jeder Spalte unterstreichen
2) für S_2 bA in jeder Zeile unterstreichen
(3) falls Sp3 ⇒ testen ob dieser zu anderer Matrix abweichen würde

Tool: gemischtes Nash-GGW finden
⇒ überprüfen ob reine Strategie besser

Regel: alle reinen Strategien in der Mischung müssen gleich gut sein ⇒ selbe Auszahlung

1) Auszahlungen aufschreiben und gleichsetzen (jeweils pro Spieler)
$$\boxed{\begin{aligned} U_1(o,\sigma_2) &= U_1(u,\sigma_2) \\ U_2(\sigma_1,L) &= U_2(\sigma_1,R) \end{aligned}}$$

Trick: zu jeder Spalte eine Konstante hinzuaddieren ⇒ N-GGW bleibt gleich

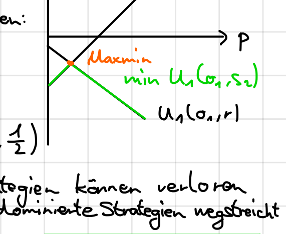
$\boxed{\text{⇒ testen ob Spiel symmetrisch}}$

⇒ wenn gemischtes GGW aus 3 Strategien gefunden ⇒ wie GGW aus 2 ausschließen?
⇒ jeweils 3. wegstreichen und zeigen, dass eine der beiden verbleibenden dominiert wird ⇒ kann kein GGW sein

Tool: testen ob s_2 strikt dominiert durch gem
$U_2(\sigma_2,U) > U_2(s_2,U)$
$U_2(\sigma_2,M) > U_2(s_2,M)$
⋮
⇒ es reicht ein q anzugeben, für den das gilt

Tool: MaxMin-Strategien
für SP1: $\max_{s_1\in S_1} \min_{s_2\in S_2} U_1(s_1,s_2)$ ⇒ schlechtestes in jeder Zeile markieren ⇒ max

für SP2: $\max_{s_2\in S_2} \min_{s_1\in S_1} U_2(s_1,s_2)$ ⇒ schlechtestes in jeder Spalte markieren ⇒ max



für gemischte Strategien:
1) $\sigma_1=(p,1-p)$
2) $U_1(o_1,l)=U_1(o_1,r)$

⇒ Ergebnis: $\sigma_1=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

⇒ reine Maxmin-Strategien können verloren gehen, wenn man dominierte Strategien wegstreicht

Tool: Minmax-Strategie
$$\boxed{\min_{s_2}\max_{s_1} U_1(s_1,s_2)}$$

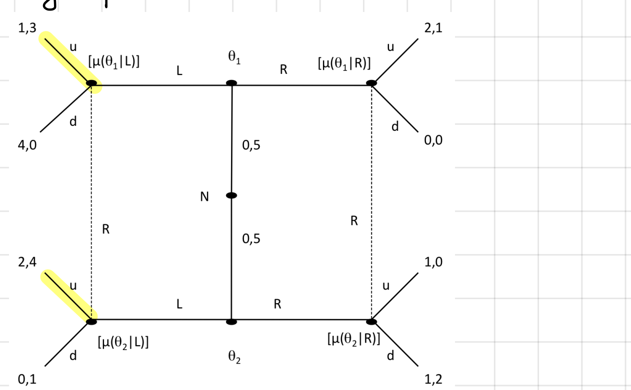
aus SP2 Sicht: maximale Auszahlung bestimmen, die SP1 mit bA erhalten kann
⇒ diese minimieren

mit gemischten:
1) $\sigma_2(l)=q$
2) $U_1(o,\sigma_2)=U_1(u,\sigma_2)$

Tool: Bayesianisches N-GG
1) Spiel definieren: Spieler i, Aktionen A_i, Typen Θ_i
↳ Typen sind Unsicherheiten über einen Spieler
2) Strategien definieren

$s_1=(A;\ C$ falls (A,b), B sonst$)$

Signalspiele



1) Übersicht
Spieler: Sender, Empfänger
Sendertypen Θ_S: Θ_1,Θ_2 mit $P(\Theta_1)=0{,}5$; $P(\Theta_2)=0{,}5$
Aktionsmengen Sender: $m\in\{L,R\}$
Empfänger: $a\in\{u,d\}$
Strategiemengen
Sender: $s_S(\Theta_S)\in\{\overbrace{(L(\Theta_1),L(\Theta_2)),(R(\Theta_1),R(\Theta_2))}^{\text{Pooling}},\underbrace{(L(\Theta_1),R(\Theta_2)),(L(\Theta_2),R(\Theta_1))}_{\text{separierend}}\}$

$$\boxed{\begin{aligned} &(s_S(\Theta_1),s_S(\Theta_2)) \\ &S_S:\{\Theta_1,\Theta_2\}\to\{L,R\} \end{aligned}}$$

Empfänger: $s_E\in\{(u,u),(u,d),(d,d),(d,u)\}$

$$\boxed{\begin{aligned} &(s_E(L),s_E(R)) \\ &S_E:\{L,R\}\to\{u,d\} \end{aligned}}$$

Beliefmengen $\mu(\Theta_1|L)$ mit $\mu(\Theta_1|L)=1-\mu(\Theta_2|L)$
$\mu(\Theta_1|R)$ mit $\mu(\Theta_1|R)=1-\mu(\Theta_2|R)$

2) Rückwärtsinduktion
⇒ ggf. dominante Strategie für Empfänger auf einer Seite finden

E's bA auf Signal L
$E[U_E(u|L)]\geq E[U_E(d|L)]$ ⇒ $\mu(\Theta_1|L)=?$

E's bA auf Signal R
$E[U(u|R)]\geq E[U(d|R)]$ ⇒ $\mu(\Theta_1|R)=?$

3) Pooling-GGW & Separierende GGW prüfen

I) Pooling R
- $m(\Theta_1)=m(\Theta_2)=R$
- Empfänger-Beliefs: $\mu(\Theta_1|R)$ via Bayes ⇒ gleich a-priori

⇒ $\mu(\Theta_1|R)=p(\Theta_1)=0{,}5$ ⇒ $\mu(\Theta_1|L)$ (off-eq) zunächst beliebig
- bA des Empfängers bestimmen über $\mu(\Theta_1|R)$
  $q=0{,}5$ ⇒ $a(R)=d$
- $\mu(\Theta_1|L)$ (off-eq) so wählen, dass sich ein Abweichen für den Sender nicht lohnt
  ⇒ $U_S(\Theta_S,R,d)\geq U_S(\Theta_S,L,a_R(L))$ ↳ kleiner wählen
  ⇒ sonst kein PB-GGW

⇒ hier kein PB-GGW, falls doch: immer beide angeben
$$\left\{\begin{matrix} m(\Theta_1)=m(\Theta_2)=R, & a(R)=d, & a(L)=u \\ \mu(\Theta_1|R)=0.5, & \mu(\Theta_1|L)\geq\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}$$

II) Pooling L
- $m(\Theta_1)=m(\Theta_2)=L$
  ↳ Rest analog

III) Separierendes GGW 1
- $m(\Theta_1)=R$, $m(\Theta_2)=L$
- Empfänger-Beliefs: $\mu(\Theta_1|R)=1$, $\mu(\Theta_2|R)=0$
  $\mu(\Theta_1|L)=0$, $\mu(\Theta_2|L)=1$

IV) Separierendes GGW 2
- $m(\Theta_1)=L$, $m(\Theta_2)=R$
- Empfänger-Beliefs: $\mu(\Theta_1|R)=0$, $\mu(\Theta_2|R)=1$
  $\mu(\Theta_1|L)=1$, $\mu(\Theta_2|R)=0$

mit 0: **V) Mix-Strategie** $m(t_1)=L$, $m(t_2)=0$
VI) Mix-Strategie $m(t_1)=R$, $m(t_2)=0$

Tool: PB-GGW bestimmen
⇒ Strategien und Beliefs aufstellen

F2: Sequentielle Rationalität
gegeben den Belief muss sich Spieler sequentiell rational verhalten ⇒ an jeder Info-Menge muss die Aktion des Spielers optimal sein, gegeben dass die Info-Menge erreicht wird, gegeben die Beliefs und Strategien der anderen Spieler ab diesem Zug
⇒ $E[U]$ berechnen ⇒ $E[U(L)]\geq E[U(R)]$
⇒ $p\leq\frac{1}{3}$ oder so

F1: Spieler haben Beliefs an jeder Info-Menge
jeder Spieler muss an jeder Info-Menge Beliefs darüber haben, an welchem Knoten er sich befindet (Info-Menge einelementig ⇒ Belief = 1)

F3: Beliefs auf GGW-Pfad
Beliefs müssen gemäß Bayesscher Regel bestimmt
$$P(\text{Knoten } x\,|\,\text{Info-Menge } I)=\frac{P(\text{Info } I\,|\,\text{Knoten } x)\cdot P(\text{Knoten } x)}{\underbrace{\sum_{\text{alle Knoten } y\in I} P(\text{Info } I\,|\,\text{Knoten } y)\cdot P(\text{Knoten } y)}_{P(\text{Info } I \text{ erreicht})}}$$
⇒ sonst: leer

⇒ schwaches PB-GGW erfüllt Forderungen 1-3
↳ impliziert noch nicht TSP
$$p(L\,|\,\text{Info erreicht})=\frac{p(\text{Info erreicht}\,|\,L)\cdot p(L)}{p(\text{Info erreicht})}=\frac{p(L)}{p(L)+p(R)}=\frac{1}{1+0}$$

F4: Off-eq Info-Mengen
intuitiv anwenden
⇒ PB-GGW erfüllt Forderungen 1-4
⇒ Kandidaten finden und überprüfen
z.B. $\{(u,L,r),p\geq\frac{1}{3}\}$ testen

Bayes Regel bei Signalspielen
$$P(\text{Typ } t\,|\,\text{Signal } m)=\frac{P(\text{Signal } m\,|\,\text{Typ } t)\cdot P(\text{Typ } t)}{P(\text{Signal } m)}$$
(orange): 0 oder 1 bei reinen Strategien
(blau): a-priori
(grün): $P(\text{Signal } m)=\sum_{t_i} P(\text{Signal } m\,|\,\text{Typ } t_i)\cdot P(\text{Typ } t_i)$

$\boxed{\text{für Gleichverteilung: } F(x)=x}$

⇒ ein GG in dem jeder Spieler eine (strikt oder schwach) dominante Strategie spielt ist immer Nash-GGW

falls es Teilspiele gibt ⇒ Rückwärtsinduktion
↳ vereinfachen

$\boxed{\text{Strategien: Aktion für jede Informationsmenge wählen}}$

$\boxed{q^* \Rightarrow \text{optimiert}}$

Bsp. Maxmin
⇒ für reine Maxmin ⇒ gesamte Matrix betrachten
⇒ für gem. Maxmin

Spieler 2 / Spieler 1

	L	C	R
U	4; 4	6; 2	0; 8
M	0; 8	6; 2	6; 2
D	8; 0	4; 4	2; 6

Bei hohen Kosten C:
Wkt. [p]

	Eintritt	Nichteintritt
~~Modern~~	~~2,-2~~	~~10,2~~
Veraltet	10,6	14,2

Bei niedrigen Kosten c:
Wkt. [1-p]

	Eintritt	Nichteintritt
Modern	8,-2	16,2
Veraltet	10,6	14,2

	E (r)	N (1-r)
MV	$10p+8(1-p),\ 6p-2(1-p)$	$14p+16(1-p),\ 2$
VV	10, 6	14, 2

$$\Rightarrow r\leq\frac{1}{2(1-p)}$$

Bsp. Grim-Trigger
$$\sum_{n=0}^{\infty}4\cdot\delta^n\geq 6+\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot\delta^n$$
$$\frac{4}{1-\delta}\geq 6+3\frac{\delta}{1-\delta}$$

Test-Center
$s\leq 20$
$s=20$
$s\in[20,40]$

kontinuierliche Aktionen / Typen

Tool: Cournot-Duopol mit asymmetrischer Information
1) **Identifikation:** F1 wählt q_1, F2 wählt q_2, F_1 hat const. Grenzkosten, F2 unsichere c_H mit v, c_L mit $(v-1)$
F2 kennt ihre Grenzkosten + Verteilung, F1 nur Verteilung
Nachfragefunktion: $p(Q)=1-Q$, $Q=q_1+q_2$
Gewinnfunktion: $\pi_i=(p-c_i)\cdot q_i$

2) **Strategien:** F1: $q_1(F_2)$; F2: $s_2(c_H)=q_2^*(c_H)$
$s_2(c_L)=q_2^*(c_L)$

3) **Profitmaximierung (bA):**
für F2 (informierte Firma): maxim. $\pi_2=(1-q_1-q_2-c_H)q_2$ nach q_2 ⇒ $q_2^*(c_H)$
maximiere $\pi_2=(1-q_1-q_2-c_L)q_2$ nach q_2 ⇒ $q_2^*(c_L)$

für F1 (uninformierte Firma):
$E[\pi_1|q_1]=v\cdot\pi_1(q_1,q_2^*(c_H),c_H)+(1-v)\pi_1(q_1,q_2^*(c_L),c_L)$
⇒ nach q_1 maximieren und $q_2^*(c_L)$ und $q_2^*(c_H)$ einsetzen
⇒ q_1^*

4) **System lösen** q_1^* in $q_2^*(c_H)$ und $q_2^*(c_L)$ einsetzen

Tool: Geschlossene Erstpreis-Auktion
1) **Identifikation** **Bieter** i, **Aktionen** b_i (Gebote): $b_i\in S_i=[0,\infty)$
Typen v_i (private Wertschätzung), meist $v_i\in\Theta_i=[0,1]$
Beliefs $p_i(\Theta_{-i}|\Theta_i)=p(\Theta_{-i})$ gleichverteilt auf $[0,1]$ gleichverteilt
Auszahlung $U_i=\begin{cases} v_i-b_i & \text{falls } b_i>b_j \\ \frac{v_i-b_i}{2} & \text{falls } b_i=b_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

2) **Strategien definieren**
⇒ $b_i>v_i$ wird schwach dominiert von $b_i=v_i$ $(U=0)$
⇒ $b_i=v_i$ wird schwach dominiert von jedem $0<b_i<v_i$
wir suchen Strategie $s_i(\Theta_i)=b_i(v_i)$
⇒ Annahme: symmetrische Strategie
im GGW muss: $\max_{b_i}(v_i-b_i)P(b_i>b_j^*(v_j))+\frac{1}{2}(v_i-b_i)P(b_i=b_j^*(v_j))$
⇒ gleiche Gebotsfunktion; monoton steigend, diffbar;
$P(b_1=b_2)=0 \Leftrightarrow P(v_1=v_2)$ ⇒ Gleichverteilung
$s_i(\Theta_i)=b_i(v_i)$ ⇒ streng monoton steigend

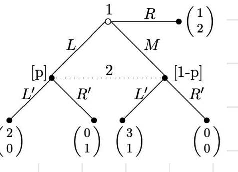
3) **Erwartete Auszahlung**

Tool: Zweitpreisauktion (Englische Auktion)
1) **Identifikation**
Bieter i   **Strategiemengen** $S_i(\Theta_i)$
Aktionen $a_i=b_i\in S_i=[0,\infty)$ Gebot
Typen $\Theta_i=v_i\in\Theta_i=[0,1]$ private Wertschätzung
Beliefs $p_i(\Theta_{-i}|\Theta_i)=p_i(\Theta_{-i})$ gleichverteilt auf $[0,1]$
Auszahlung $U_i=\begin{cases} v_i-b_j & \text{falls } b_i>b_j \\ \frac{v_i-b_j}{2} & \text{falls } b_i=b_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ⇒ darauf achten was Auszahlung ist

2) **Strategien** jeder Bieter wählt $s_i(\Theta_i)=b_i(v_i)$
für Zweitpreisauktion: $b_i=v_i$ ist schwach dominant
Fälle: 1) $v_i<b_j$ ⇒ $v_i=b_i$ | $v_i<b_i<b_j$ | $v_i<b_j<b_i$ | $b_i<v_i$
2) $v_i>b_j$ ⇒ $v_i=b_i$ | $b_i<b_j<v_i$ | $b_j<b_i<v_i$ | $b_j<v_i<b_i$
3) $v_i=b_j$ ⇒ $b_i=v_i$ | $b_i>v_i$ | $b_i<v_i$
⇒ kein Anreiz zum Abweichen

3) **BN-GGW finden** $b_i=v_i\ \forall i$
$E[v_1^{(2)}]=\frac{2}{3}\cdot S-\frac{10}{3}$ für $n\to\infty$ ⇒ $p\to 0$ Gemeinde

optimale Strategien:
1) $p_i<c_i$ p_j, c_i, p_i gleich c_i, p_i, p_j gl. egal ob c_i oder p_i c_i, p_j, p_i Gewinn, aber hab höhere Kosten ⇒ Verlust
2) $p_i>c_i$ p_i, p_j, c_i Verlust in jedem Fall, sonst gleich
3) $p_i=c_i$ schwach dominant



PB-GGW finden
$E[U_2(\sigma,L')]\geq E[U_2(\sigma,R)]$
⇒ für $p\leq\frac{1}{2}$ wird SP2 L' spielen
$\{(M,L'),p=0\}$ ⇒ da M gespielt, ist Prob. für $L=0$ ⇒ $p=0$
$\{(R,R'),p\geq\frac{1}{2}\}$

Tool: Unendlich oft wiederholte Spiele
1) alle reinen N-GGW finden
2) für $T=\infty$:
Grim-Trigger Strategie definieren
↳ abdiskontierte Gesamtauszahlungen berechnen
$V_i(\text{Koop})=U_i(\text{Koop})\cdot\frac{1}{1-\delta}$
$V_i(\text{Abw})=U_i(\text{Abw})+U_i(\text{Strafe})\cdot\frac{\delta}{1-\delta}$
⇒ $V_i(\text{Koop})\geq V_i(\text{Abw})$. ⇒ krit. Diskontfaktor berechnen, ab dem sich Kooperation lohnt
⇒ Drohung ist glaubwürdig, da das NGG des Stufenspiels per Def. ein GGW ist ⇒ in der Bestrafungsphase hat kein SP Anreiz davon abzuweichen ⇒ Drohung ist glaubwürdig

Antwort: "Grim-Trigger-Strategie ist TSP-GGW wenn $\delta\geq\ldots$. Für Spieler die geduldig genug sind, kann Kooperation aufrechterhalten werden."

Tool: endlich oft wiederholte Spiele
1) in Runde 2: für SPi schlechtestes NGG als Strafe, bestes N-GG als Belohnung
2) in Runde 1: spiele kooperative Strategie
in Runde 2: NGG mit Belohnung falls alle kooperiert haben
NGG mit Bestrafung falls SPi abgewichen ist
3) Gesamtauszahlung berechnen
$V_i(\text{Koop})=U_i(\text{Koop in R1})+U_i(\text{Belohnung in R2})$
$V_i(\text{Abw})=U_i(\text{Abw. in R1})+U_i(\text{Strafe in R2})$
⇒ wenn $V_i(\text{Koop})\geq V_i(\text{Abw})$ für alle SP, existiert ein TSP-GGW, in dem in Runde 1 kooperiert wird

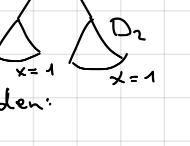
⇒ falls das Stufenspiel nur ein N-GGW hat
↳ NGG wird in jeder Runde gespielt

Def. Gefangenen-Dilemma
B ist strikt dominant, aber (A,A) liefert höhere Auszahlung als (B,B)

	D	C
D	1,1	3,0
C	0,3	2,2

⇒ in NS-Spiel ist Kombi von reinen Minmax-Strategien nicht immer NGG in reinen Strategien → nur wenn das Spiel einen Sattelpkt. in reinen Strategien hat (Maxmin = Minmax) ⇒ Gegenbsp. Schere-Stein-Papier
⇒ Indifferenzprinzip
⇒ Gebot in Zweitpreisauktion ist immer strikt höher als in Erstpreisauktion ($b_{2nd}=v$), ($b_{1st}<v$)
⇒ First-Mover-advantage basiert auf Ungeduld des Gegners
↳ für geduldig ($\delta\approx 1$) ist er also kleiner

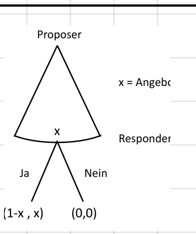
Diktatorspiel



$\left(D_i,\ \begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=1 \end{matrix}\right)$

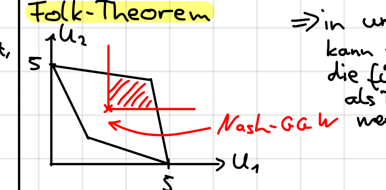
⇒ wenn 2 Runden:
$E\to D_1^1$
$E\to D_1^2$ wenn $x_1^1=0$, sonst D_2^2
$\left(\begin{matrix} D_1: x_1^1=0,\ x_2^1=1 \\ D_1: x_2^1=1,\ x_2^1=1 \end{matrix}\right)$ ist TSP-GGW

Experimentelle Resultate



⇒ gemischte Strategien nur in Nullsummen-Spielen wirklich sinnvoll
⇒ beim Schatz verstecken ⇒ keine Extreme
Ultimatumspiel ⇒ 2 TSP-GGW: $x=\varepsilon$, $x=0$
⇒ aber viele Nash-GGW: $x=\bar{x}$, ja wenn $x\geq\bar{x}$, $\bar{x}\in[0,1]$
⇒ experimentell: Proposer bieten mehr an, Responder lehnen auch ab ⇒ in keinem NGG der Fall
Angebote kleiner als 20% werden oft abgelehnt
$(0{,}7;0{,}3)\prec_R(0;0)$ ⇒ Präferenzen hängen auch davon ab, was der andere bekommt
⇒ Ungleichheits-Aversion, Reziprozität

Folk-Theorem



⇒ in unendlich oft wiederholtem Spiel kann fast jede erreichbare Auszahlung, die für alle SP besser ist als Bestrafung als TSP-GGW aufrechterhalten werden, wenn geduldig genug