Aufgaben

Zentralfeld

$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r)$; $\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\frac{\vec{x}}{r}$ ($\frac{\vec{x}}{r} = \vec{e}_r$)

$\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r}$; $r^2 = x^2+y^2+z^2$

Rotation (kons. Kraft)

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}V = -\partial_i \times (\partial_j V)$

$= -\partial_i(\partial_j V)\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k = \partial_j(\partial_i V)\varepsilon_{jik}\vec{e}_k$

$= \partial_i(\partial_j V)\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k = -\vec{\nabla}\times\vec{F} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

Kurvenintegral (Kreis)

$\vec{x} = \tilde{R}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$ $d\vec{x} = \tilde{R}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}d\varphi$; $\tilde{R}$ für r einsetzen

Streuquerschnitt

$r(\varphi) = \dots \Rightarrow$ Nenner 0 setzen $\Rightarrow \bar{\varphi} = \dots$

mit z.B. $\vartheta = \pi - 2\bar{\varphi} \Rightarrow \vartheta = \dots$

ε/f einsetzen; mit $L = m v_\infty b \Rightarrow b^2 = \dots$

$\frac{\partial b^2}{\partial\vartheta}$ berechnen; Betrag bilden; $\frac{1}{2\sin\vartheta} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}$

Rotierender Draht

neue Basis: $\vec{e}_x$ (Draht), $\vec{e}_z$ (senkrecht)

$\vec{e}_x = \cos(\omega t)\vec{e}_x' + \sin(\omega t)\vec{e}_z'$; $\vec{e}_y = \vec{e}_y'$;

$\vec{e}_z = -\sin(\omega t)\vec{e}_x' + \cos(\omega t)\vec{e}_z'$ Zwangskraft

$\vec{x} = r\vec{e}_x$; $\vec{\omega} = -\omega\vec{e}_y$ $\Rightarrow$ alles was nicht $\vec{e}_x$

$\vec{e}_z' = \cos(\omega t)\vec{e}_z + \sin(\omega t)\vec{e}_x$ für F_G

Bewegung (Kurve) mit dt

$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$

$\vec{n}_H(t) = \frac{d\vec{\tau}(t)}{ds}\left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{ds}\right|^{-1} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\left|\frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|^{-1} = \frac{d\tau(t)}{dt}\left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|^{-1}$

$\rho(t) = \left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{ds}\right|^{-1} = \left|\frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|^{-1} = |\vec{v}(t)|\left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|^{-1}$

Teilchen auf Ellipsenbahn

$F = ? \Rightarrow F = m\ddot{\vec{x}}$; $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$; $\vec{\nabla}F(r) = F'(r)\frac{\vec{x}}{r}$

wenn Vektor in E-Satz $\Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 \Rightarrow$ Skalar

$r^2 = x^2+y^2+z^2$

Raketenaufgabe

$F_g = -mg$; $\Delta p_r = \Delta m_T(v(t)-v_0)$

$\Delta p = -\Delta p_T = -\Delta m_T(v-v_0) = \Delta m(v-v_0)$

$\dot{p} = \dot{m}(v-v_0) = F_R \Rightarrow F = -mg + \dot{m}(v-v_0)$

$\dot{p} = F = \dot{m}v + m\dot{v}$; $\frac{\dot{m}}{m}v_0 = -g - \dot{v}$

$v(t) = -v_0\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) - gt$

$m(t) = m_0 - \mu t$; $t_e = \frac{m_T}{\mu}$

$v(t) = -v_0\ln\left(1-\frac{m_T}{m_0}\right) - g\frac{m_T}{\mu}$

Gravitationspotential

$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \Rightarrow \Phi = E_{pot}/m$

Abweichung von Taylor

Restglied berechnen

$\left|\frac{R_1(x)}{0.\text{Ordnung}}\right| = 0{,}01$

DGLs entkoppeln

$\dot{v}_x = v_y\omega$ $\Rightarrow$ ableiten

$\dot{v}_y = -v_x\omega$

$\ddot{v}_x = -v_x\omega^2$; $\ddot{v}_y = -v_y\omega^2$

wenn am Ende Infos fehlen $\Rightarrow$ Verknüpfung mit gekoppelter

Energieerhaltung Kepler

$\dot{E} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r)\right]$

$= m\dot{r}\ddot{r} + \dot{r}\cdot\vec{\nabla}V(r)$

$= \dot{r}\left[m\ddot{r} + \vec{\nabla}V(r)\right]$

$= 0$

Integral-Tipps

bei Wurzeln versuchen x rauszuziehen $\Rightarrow$ Substitution

DGL-Tipps

Lösung prüfen: einsetzen & Randbedingung prüfen

Koordinatentransformationen

1) $\vec{v} = v_i e_i = v_j' e_j'$

2) $\langle\vec{e}_j', \vec{v}\rangle = v_i\langle\vec{e}_j', \vec{e}_i\rangle = v_i'\langle\vec{e}_j', \vec{e}_i'\rangle$

3) alle $\langle\vec{e}_j', \vec{e}_i'\rangle$ ausrechnen $\Rightarrow$ ggf. kein Orthonormalsystem

mit Matrix: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ invertieren

$\vec{v}' = A^{-1}\vec{v}$; $\vec{e}_j'$; $\vec{e}_i$

alle $\langle\vec{e}_j', \vec{e}_i\rangle$ ausrechnen — wird festgehalten

$\hookrightarrow \underbrace{v_i'\langle\vec{e}_j', \vec{e}_i'\rangle}_{\text{Skalar} \Rightarrow \text{nicht Betrag}} = v_i\langle\vec{e}_j', \vec{e}_i\rangle$ z.B.: $2v_1' = v_1 + v_2$

Energiesatz in 1D

Kraft unabh. von $\dot{x}$

$m\ddot{x} = F(x)$ $\quad V(x) = -\int_{x_0}^{x_b} F(x')\,dx'$

$m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}F(x)$

$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = -\frac{d}{dt}V(x)$ $\Rightarrow F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right] = 0$ $\quad \frac{d}{dt}V(x) = \frac{dV}{dx}\dot{x} = -F\dot{x}$

$\Phi(x) = \frac{V(x)}{m}$

Umkehrpunkte

$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}$

$\pm\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}dx = \int_{t_1}^{t_2}dt = t_2 - t_1$

Sonstiges

$x^{yz} = e^{\ln(x)yz}$ $\quad r^{2-n} = e^{(2-n)\ln(r)}$

$\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \Rightarrow x = \sin(u)$

1) partiell 2) $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$

$\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$

Harmonischer Oszillator

DGL: $y'' + \omega^2 y = 0$

int. Fak.: $2y'$

$\frac{d}{dt}(y'^2) + \omega^2\frac{d}{dt}(y^2) = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(y'^2) = -\omega^2\frac{d}{dt}(y^2)$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \pm i\omega$

$\Rightarrow \ln(y) = \pm i\omega t \Rightarrow y = e^{\pm i\omega t}$

$\Rightarrow y(t) = A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Bewegung r^{-n}-Feldern

$V_n(R) = V_2(R) \Rightarrow A_n = A(n-1)R^{n-2}$

$V_n(r) = -\frac{AR^{n-2}}{r^{n-1}}$

Teilchen im Unendlichen: E=0

$v_0 = |\vec{v}_0|\vec{e}_r$ $\quad |\vec{v}_0| = \sqrt{\frac{2A}{mr_0}}$

$E_3 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{AR}{r_0^2} = \frac{A}{r_0} - \frac{AR}{r_0^2}$

Kurvenintegral

$V(\vec{x}) = -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x})\,d\vec{x}$

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\t\\0\end{pmatrix}$; $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$

$= -\int_0^x\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}dt - \int_0^y\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}dt - \int_0^z\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}dt$

Rot. kons.

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}V(\vec{x})) = -\vec{e}_i\partial_i\times(\vec{e}_j\partial_j V)$

$= -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j V\vec{e}_k = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j + \varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i)V\vec{e}_k$

$= -\frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j - \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_i)V\vec{e}_k = 0$

Erhaltung Skalarprodukt

$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = x_i y_i = R_{ia}x_a R_{ib}y_b = R_{ai}R_{ib}x_a y_b = \delta_{ab}x_a y_b = x_b y_b = \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle$

Virialsatz

$f(a\vec{x}) = a^k f(\vec{x})$

$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{\nabla}f(\vec{x}) = k f(\vec{x})$ Euler. hom. Fkt.

$E_{kin} = \langle T\rangle = \frac{k}{2}\langle V(\vec{x})\rangle = E_{pot}$

$x^2 \Rightarrow$ Grad 2

$-\frac{a}{r} \Rightarrow$ Grad -1

homogen vom Grad k

$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$

wenn $V(\lambda\vec{x}) = \lambda^k V(\vec{x})$: Ort

$\vec{x} \to \frac{a}{b}\dot{\vec{x}}$ $\quad \ddot{\vec{x}} \to \frac{a}{b^2}\ddot{\vec{x}}$

Zeit

$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \to m\frac{a}{b^2}\ddot{\vec{x}} = -a^{k-1}\vec{\nabla}V(\vec{x})$

unverändert wenn: $\frac{a^2}{b^2} = a^k \Rightarrow b = a^{1-k/2}$

$\frac{t'}{t} = \left(\frac{L'}{L}\right)^{1-k/2}$

Harmonischer Oszillator

$F = -kx$ $\quad y'' + \omega^2 y = 0$

$V(x) = -\int_0^x F(x')\,dx = \frac{k}{2}x^2$

$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$

Umkehrpunkte: $\quad E = \frac{k}{2}A_0^2$

$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$T = 0 \Leftrightarrow E = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 \Leftrightarrow x_{1/2} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$

Diagonalisierung Matrix

$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} = (A-\lambda\mathbb{1})^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ wenn $\exists$ Inverses

$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \lambda$ ermitteln (Eigenwerte)

$\Rightarrow$ Eigenvektoren ausrechnen

Stöße und Streuung

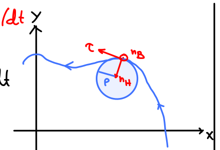
el. Stoß: Impulserhaltung & Energieerhaltung

SPS: $\vec{x}_i' = \vec{X} - \vec{x}_i$ $\Rightarrow p_{ges} = 0$ $\quad |\vec{v}_{i1}| = |\vec{v}_{f1}|$; $|\vec{v}_{i2}| = |\vec{v}_{f2}|$

gg: $\vec{v}_{i,2} = 0$

Bewegung in 3D

schauen ob ds/dt an ω denken!



Bogenelement $ds := |d\vec{x}(t)| = \left|\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right|dt = |\vec{v}(t)|\,dt$

Bogenlänge $s = \int_0^s ds' = \int_0^t|\vec{v}(t')|\,dt'$

1) Tangentialvektor $\vec{\tau} = \frac{d\vec{x}}{ds}$; $|\vec{\tau}| = 1$ — normieren wenn nach dt ableiten

2) Hauptnormalenvektor $\vec{n}_H = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|^{-1}$ — senkrecht

Krümmungsradius $\frac{1}{\rho} := \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$ $\to \rho$ Krümmungsradius

3) Binormalenvektor $\vec{n}_B = \vec{\tau}\times\vec{n}_H$

Freier Fall aus geringer Höhe

$m\ddot{r} = -mg \Rightarrow m\dot{v} = -mg \Rightarrow v = -gt + v_0$

$\dot{r} = -gt + v_0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + r_0$

Freier Fall; geringe Höhe; Stokesche Reibung

$m\ddot{r} = m\dot{v} = m\frac{dv}{dt} = -mg - Kv(t)$

$m\frac{dv}{dt} = -mg\left(1 + \frac{Kv}{mg}\right)$ mit $u = \frac{Kv}{mg}$

$\frac{mg}{K}\ln\left|1 + \frac{Kv}{mg}\right| = -gt + C_1 \Rightarrow v = \dots$

$t\to\infty \Rightarrow v_E = -\frac{mg}{K}$; $\dot{v}_E = 0$; $v(t=0) = v_0$

$v_E < 0 \Rightarrow$ nach $|v_E|$ umschreiben

mit $r(t=0) = r_0 \Rightarrow C_2$

$r(t) = r_0 + (v_0 + |v_E|)\frac{|v_E|}{g} - |v_E|t$

Freier Fall, geringe Höhe; Luftwiderstand

$m\ddot{r} = -mg + K\dot{v}^2$; $v_E^2 = \frac{mg}{K}$; $x = \frac{v}{v_E}$ $\Rightarrow$ Partialbr.zerl.

$v = -v_E\frac{1 - e^{-2gt/v_E}}{1 + e^{-2gt/v_E}}$

Freier Fall; große Höhe

$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$; int. Fakt.: $\dot{r}$

$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = GMm\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{E_{kin}} - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{E_{pot}}\right) = 0$

Energiesatz in 3D

$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2}_{E_{kin}}\right) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}$

$d\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{x} = \underbrace{dA}_{\text{Arbeit}}$

$P = \frac{W}{t} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}$

$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dA}{dt}$ für Erhaltungsgröße

gilt für Potentialkräfte:

$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$

$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{\nabla}V\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{dV(\vec{x})}{dt}$ Def. tot. Abl.

$\boxed{E = T + V = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + V(\vec{x})}$

DGLs

Klassifikation DGLs

1) gewöhnlich/partiell
2) Linear/nicht-Linear?
3) homogen/inhomogen
4) Ordnung der DGL

homogene DGL $\to$

Ansatz $y_{hom}(x) = e^{kx}$ (lineare DGL)

Trennung der Variablen

y_1 bekannt $\Rightarrow$ D'Alembert: $y_2(x) = f(x)y_1(x)$ in DGL einsetzen

alg. Lösung: $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$

$\to$ Ansatz inh.: $y(x) = C(x)e^x \Rightarrow$ nicht mehr $+\,y_{hom}(x)$

inhomogene DGL

$\to$ Variation der Konstanten (als f(x), ableiten, in DGL einsetzen)

$\to$ Ansatz $y_{inh} = ax^2 + bx + c$ (für $A(x) = 3x^2$)

Gesamtlösung: $y = y_{hom} + y_{inh} = a_1y_1(x) + a_2y_2(x) + y_{in}(x)$

Zusatz: eindeutige Lösung? - umschreiben in System 1. Ordnung $\Rightarrow$

$y_1(x) = y(x)$; $y_2(x) = y'(x)$; ...

$y'' + y = 0$

$y_a = y$; $y_b = y'$

$y_a' = y' = y_b$; $y_b' = y'' = -y = -y_a$

Wronski-Determinante

(lineare Unabhängigkeit)

$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$? (für n=2)

Lipschitz-Bedingung

$(y'(x) = f(x,y))$

$\left|\frac{\Delta f}{\Delta y}\right| = \left|\frac{f(x,y) - f(x,\tilde{y})}{y - \tilde{y}}\right| \leq k$

Taylor

$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{Linearisierung}} + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

Lagrange'sches Restglied

$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Anwendungen

$\sqrt{10^2+1}$

$f(x) = \sqrt{a^2 + x}$

$\ln(1{,}1) = \ln(1+x)$

$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Newton Axiome

1. wenn $\vec{F} = 0$, $\vec{p} = const$
2. $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = (m\ddot{\vec{x}})$
3. $-\vec{F}_a \overset{!}{=} \vec{F}_b$

f(x)	Log
$\updownarrow$	Inverse Winkel
	Algebr.
	Trigonometr.
g'(x)	E-Fkt.

Differentation/Integration

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$\int_a^b g'(x)\cdot f(g(x))\,dx = F(g(x))\Big|_a^b$

Grenzen bei Substitution: $a \to g(a)$ mit $u = g(x)$

Zerlegung in Tangential- und Normalkomponenten

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)|\cdot\vec{\tau}$ $\Rightarrow$ v ist tangential zur Bahnkurve

mit $v = |\vec{v}|$:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \underbrace{\dot{v}\vec{\tau}}_{\text{tangential}} + \underbrace{v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}}_{\text{Richtung Hauptnormale}}$

Kurvenintegrale

1D $\quad V(x) = -\int_{x_0}^{x}F(x')\,dx'$

3D $\quad \Phi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2}\vec{A}(\vec{x})\,d\vec{x} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(\vec{x}(t))\underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}(t)}dt$

1) Wegparameter (Intervall)
2) $\vec{F}$ in Parameterform $\hookrightarrow (t,0,0)^T \to (1,t,0)^T \to (1,1,t)^T$
3) $d\vec{x} \Rightarrow \dot{\vec{x}}\,dt$

$\oint\vec{F}(\vec{x})\,d\vec{x} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{x}) = 0$

$\Leftrightarrow \exists -\vec{\nabla}V(\vec{x}) = \vec{F}$

Impuls, Drehimpuls, Drehmoment

$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ (rechte-Hand-Regel)

$\hookrightarrow$ Salatschleuder

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} = m(\vec{x}\times\dot{\vec{x}})$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}}\times\vec{p}}_{=0} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$ $\quad \dot{\vec{r}} = \vec{v} \parallel \vec{p}$

$L_z = (\vec{x}\times\vec{p})_z = mx_1v_2 - mx_2v_1$

Rechenregeln-Nabla

$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v}) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{v} + f\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$

$\vec{\nabla}\times(f\vec{v}) = \vec{\nabla}f\times\vec{v} + f\vec{\nabla}\times\vec{v}$

$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w} - \vec{w}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$

Additionstheoreme

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(y)\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos(\pi - \vartheta) = -\cos(\vartheta)$

Keplerproblem

Vorraussetzungen: $-\vec\nabla V$ ist Zentralkraftfeld, $V(x) = -\frac{\alpha}{r}, \alpha>0$

immer konservativ $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung / Energieerhaltung

Zentralfelder $\vec F(\vec x) = F(r)\frac{\vec x}{r} = F(r)\,\vec e_r$

1) $\exists V \Rightarrow$ Rotation
2) $\vec L = \text{const} \Rightarrow \frac{d\vec L}{dt}$ 2-dim
3) Bahnebene $\perp \vec L \Rightarrow \vec x\cdot\vec L = \vec x\cdot(m\vec x\times\dot{\vec x}) = 0$
4) $\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec L|}{2m}$ Kepler II $\Rightarrow dA = \frac12|\vec x\times d\vec x| = \frac12|\vec x\times\dot{\vec x}|dt$
5) $|\vec L| = mr^2\dot\varphi \Rightarrow \vec L = m(\vec x\times\dot{\vec x})$
$\dot{\vec e}_r = \dot\varphi\,\vec e_\varphi$ $\Rightarrow$ ebene Polarkoordinaten
$\dot{\vec e}_\varphi = -\dot\varphi\,\vec e_r$ $\quad \dot{\vec x} = (r\vec e_r)^\cdot = \dot r\vec e_r + r\dot\varphi\vec e_\varphi$
6) $E = \frac m2\dot r^2 + \underbrace{\left[\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right]}_{U_L}$

$\Rightarrow E = E_{kin} + V_{eff}(r)$ $\quad \dot r^2 \sim -V_{eff}$

für alle kons. Zentralkräfte

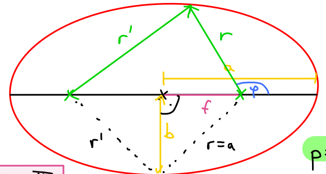
für $\vec F(r) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec e_r$; $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$

1) $\dot r^2 = \frac2m\left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]$; $\dot r = r'\dot\varphi = r'\cdot\frac{L}{mr^2}$ $\quad t\to\varphi$
2) $r(\varphi)$ mit $p = \frac{L^2}{m\alpha}$
3) $\frac{(r')^2}{r^4} = \frac{2E}{\alpha p} - \frac1{r^2} + \frac2{pr}$; $r = \frac1u$; $r' = -\frac1{u^2}u'$ + ableiten nach φ
$\frac{r'^2}{r^4} = \frac{2m}{L^2}(E - V_{eff}) = u'^2$ $\quad u'=0 \Rightarrow$ Kreisbahn
ableiten
4) $u'' + \eta^2 u = \frac1p \Rightarrow u = A\cos(\eta\varphi) + B\sin(\eta\varphi) + \frac{1}{p\eta^2}$
5) Umkehrpunkte: $\dot r^2 = 0 \Rightarrow \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$ (mit u)
mit $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{\alpha}}$ ($\frac1p$ ausklammern)
6) Anfangsbedingungen $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

Potential: $V = \frac{\alpha}{r}$
$\alpha>0 \Rightarrow$ abstoßend
$\alpha<0 \Rightarrow$ anziehend
$\eta<1 \Rightarrow 1 + \frac{\beta m}{L^2} < 1 \Rightarrow \beta<0$

$L = |\vec r\times\vec p| \Rightarrow L = bmv_\infty$

Kepler I



für $V\sim\frac1r$
$f = a\varepsilon$
$p = a(1-\varepsilon^2)$

I) $r' + r = 2a$ Def. Ellipse
II) $\vec r' = 2f\cdot\vec e_x + \vec r$
I) $(r')^2 = (2a-r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2$
II) $(r')^2 = 4f^2 + r^2 + 4fr\cos\varphi$
I-II $0 = 4a^2 - 4ar - 4f^2 - 4fr\cos\varphi$
$(a + f\cos\varphi)\cdot r = a^2 - f^2$
$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{a(1+\varepsilon\cos\varphi)} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

$\frac{dU_L}{dr}$ Lokale Extrema im eff. Potential
$E<0$ $\begin{cases}\varepsilon = 0: \text{Kreisbahn}\\ 0<\varepsilon<1: \text{Ellipse}\end{cases}$
$E=0 \leftarrow \varepsilon = 1$: Parabel
$E>0 \leftarrow \varepsilon>1$: Hyperbel
↳ auch für abstoßend

Kepler III

für $V\sim\frac1r$

$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow A = \frac{L}{2m}\tau = \frac{\sqrt{pm\alpha}}{2m}\tau = \frac\tau2\sqrt{\frac{p\alpha}{m}}$
$A = \pi ab = \pi a\sqrt{ap}$; wenn $r = r' \Rightarrow r = a$
Geom. Ellipse $\quad \Rightarrow b^2 = a^2 - f^2 = a^2(1-\varepsilon^2) = ap$
$\pi a^{3/2}\sqrt p = \frac\tau2\sqrt{\frac\alpha m}\sqrt p \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\pi^2 a^3 m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$

Kepler – Anfangsbedingungen

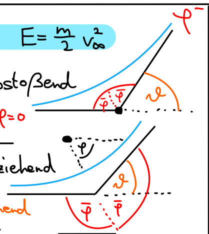
$u(\varphi=0) = u_+$ $\quad \varphi=0$ sonnennächster Punkt
$u(\varphi=0) = 0$ Teilchen aus ∞
$\dot r(t=0) = -v_\infty \Rightarrow u'(\varphi=0) = -\frac mL\dot r(t=0)$ $\quad v_\infty$ gegeben
$u'(\varphi=0) = 0$ Kepler normal

$\dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Lu^2}{m}\left(\frac{d}{d\varphi}\frac1u\right) = \frac{Lu^2}{m}\left(-\frac1{u^2}\right)\frac{du}{d\varphi} = -\frac Lm u'$

Streuwinkel $\quad L = mv_\infty b \quad E = \frac m2 v_\infty^2$

$2\bar\varphi + \vartheta = \pi$ / $\alpha>0$ abstoßend
$\bar\varphi + \vartheta = \pi$
$\rightsquigarrow \bar\varphi = \bar\varphi(b)$

$\vartheta + \pi = 2\bar\varphi$ $\quad \alpha<0$ anziehend



Stoßparameter

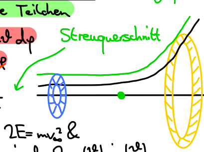
anziehend
$\bar\varphi = \arccos\left(-\frac1\varepsilon\right)$; $\vartheta = 2\bar\varphi - \pi$
$\sin\frac\vartheta2 = \sin\left(\bar\varphi - \frac\pi2\right) = -\cos\bar\varphi = \frac1\varepsilon$ $\quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m\alpha^2}}$
$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\frac\vartheta2} - 1\right)\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}$

Streuquerschnitt

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega = \frac{\text{pro Sek. nach } [\vartheta' + d\vartheta'] \text{ ausfallende Teilchen}}{\text{pro Sek. u. Fläche einfallende Teilchen}}$ differentieller Wirkungsquerschnitt

$= nv\,dt\,b\,db\,d\varphi = nv\,dt\,b(\vartheta)\left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right| d\vartheta\,d\varphi$
$= nv\,dt\cdot\text{Fläche} = nv\,dt\cdot\underbrace{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}_{d\Omega}$

Streuquerschnitt



$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b\left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right|\frac1{\sin\vartheta} = \left|\frac{\partial b^2}{\partial\vartheta}\right|\frac1{2\sin\vartheta}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2v_\infty^4}\frac{\cos\left(\frac\vartheta2\right)}{\sin^3\left(\frac\vartheta2\right)\sin\vartheta} = \frac{\alpha^2}{4(2E)^2}\frac{1}{\sin^4\left(\frac\vartheta2\right)}$ mit $2E = mv_\infty^2$ & $\sin\vartheta = 2\cos\left(\frac\vartheta2\right)\sin\left(\frac\vartheta2\right)$

mit $\alpha = Ze^2$: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{4(2E)^2}\sin^{-4}\left(\frac\vartheta2\right)$ Rutherford für $\vec F = -\frac{\alpha}{r^2}\vec e_r$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{db}{d\vartheta}\right|\frac b\vartheta$ mit $\sin\vartheta\approx\vartheta$ für kleine Winkel

Streuaufgabe

Raumwinkel $d\Omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ $\quad \varphi\in[0,2\pi]$, $\vartheta\in[0,\pi]$

1) Winkelzusammenhänge ablesen
z.B. $\vartheta = \pi - 2\bar\varphi$; ggf. $\sin(\bar\varphi) = b/R$
2) ggf. Stoßparameter berechnen
3) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = b\left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right|\frac1{\sin\vartheta}$ diff. Streuquerschnitt
4) wieviel Kügelchen? $N_D = nv\Delta t\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega_0$
gg. Winkel für ϑ und φ einsetzen
5) totaler Streuquerschnitt
$\sigma = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$

konservative Kraftfelder

$\vec F = -\vec\nabla V(\vec x)$
$\Rightarrow$ heißt konservativ
$\Leftrightarrow \vec\nabla_x\times\vec F = 0$
$V(\vec x) = -\int_{\vec x_0}^{\vec x}\vec F(\vec x)\,d\vec x$

Satz von Stokes

$\oint_{\partial S}\vec F\cdot d\vec\lambda = \int_S(\vec\nabla\times\vec F)\cdot d\vec s$
W-Integral $\quad$ senkrecht zur Ebene der Kurve

Satz von Schwarz

$\partial_i\partial_j V = \partial_j\partial_i V$

Tensoren

polar($\vec v$) vs. axial ($\vec\omega$)

Vergleich Zweikörper – Kepler

$V(|\vec x|) = \frac{-\alpha}{|\vec x|}$ wie Kepler

$-\vec\nabla V(|\vec x|)$ Zentralfeldkraftfeld $\to$ Drehimpuls-/Energieerhaltung

Zweikörperproblem

$V_{12}(|\vec x_1 - \vec x_2|) = V_{21}(|\vec x_1 - \vec x_2|) =: V(|\vec x_1 - \vec x_2|)$
$m\ddot{\vec x}_1 = -\vec\nabla_1 V(|\vec x_1 - \vec x_2|)$; $m\ddot{\vec x}_2 = -\vec\nabla_2 V(|\vec x_1 - \vec x_2|)$
$m_1m_2\ddot{\vec z} = -m_2\vec\nabla_1 V(|\vec z|) + m_1\vec\nabla_2 V(|\vec z|) = -(m_1+m_2)\vec\nabla V(|\vec z|)$
$\vec\nabla_1 V = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial\vec x_1} = \frac{dV}{dr}\frac{\vec z}{r}$ $\quad \vec\nabla_2 V = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial\vec x_2} = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec z}{r} = -\nabla V(|\vec z|)$

3. NA: $\vec F_{12} = -\vec F_{21} \Rightarrow \vec\nabla_1 V = -\vec\nabla_2 V$ Relativbewegung
$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$; $\mu\ddot{\vec z} = -\vec\nabla V(|\vec z|)$ $\quad \vec z = \vec x_1 - \vec x_2$ $\quad r := |\vec z|$ $\quad M\ddot{\vec X} = 0$ gleichförmig, $v = \text{const.}$
$\vec X = \frac{m_1\vec x_1 + m_2\vec x_2}{m_1+m_2} \Rightarrow M\ddot{\vec X} = m_1\ddot{\vec x}_1 + m_2\ddot{\vec x}_2 = -\vec\nabla V_1(|\vec x_1 - \vec x_2|) - \vec\nabla_2 V(|\vec x_1 - \vec x_2|) = 0$

Krummlinig-orthogonale Koordinaten

$d\vec x = \sum_{i=1}^3\frac{\partial\vec x}{\partial q_i}dq_i$; $h_i = \left|\frac{\partial\vec x}{\partial q_i}\right|$; $\vec e_i = \frac{\partial\vec x}{\partial q_i}h_i^{-1}$; $\vec\nabla f = \left(\sum_{i=1}^3\frac{\vec e_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)$

$\vec A\cdot\vec e_r = A_r$

Polar: $\vec x = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$; $\vec e_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$; $h_r = 1$; $\vec e_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$; $h_\varphi = r$

Zylinder: $\vec x = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$; $\vec e_\rho = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$, $h_\rho = 1$; $\vec e_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$; $h_\varphi = \rho$; $\vec e_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $h_z = 1$

$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2d\varphi^2 + dz^2$; $\vec\nabla f = \vec e_\rho\partial_\rho f + \frac{\vec e_\varphi}{\rho}\partial_\varphi f + \vec e_z\partial_z f$

$\vec\nabla\cdot\vec F = \frac1\rho\partial_\rho(\rho F_\rho) + \frac1\rho\partial_\varphi F_\varphi + \partial_z F_z$

$\vec\nabla\times\vec F = \left[\frac1\rho\partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi\right]\vec e_\rho + \left[\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z\right]\vec e_\varphi + \frac1\rho\left[\partial_\rho(\rho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\rho\right]\vec e_z$

Kugel: $\vec x = \begin{pmatrix}r\cos\varphi\sin\vartheta\\ r\sin\varphi\sin\vartheta\\ r\cos\vartheta\end{pmatrix}$; $\vec e_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$; $h_r = 1$; $\vec e_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}$; $h_\vartheta = r$; $\vec e_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$; $h_\varphi = r\sin\vartheta$

$ds^2 = dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2$ $\quad \vec\nabla f = \vec e_r\partial_r f + \frac{\vec e_\vartheta}{r}\partial_\vartheta f + \frac{\vec e_\varphi}{r\sin\varphi}\partial_\varphi f \Rightarrow \vec\nabla f(r) = \frac{df(r)}{dr}\vec e_r = f'(r)\vec e_r$

$\vec\nabla\cdot\vec F = \frac1{r^2}\partial_r(r^2F_r) + \frac1{r\sin\vartheta}\partial_\varphi F_\varphi + \frac1{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta F_\vartheta)$

$\vec\nabla\times\vec F = \frac1{r\sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta(F_\varphi\sin\vartheta) - \partial_\varphi F_\vartheta\right]\vec e_r + \frac1r\left[\frac1{\sin\vartheta}\partial_\varphi F_r - \partial_r(rF_\varphi)\right]\vec e_\vartheta + \frac1r\left[\partial_r(rF_\vartheta) - \partial_\vartheta F_r\right]\vec e_\varphi$

Vektorfelder, Differentialoperatoren

$\vec\nabla f(\vec x) = \begin{pmatrix}\partial_1 f\\ \vdots\\ \partial_n f\end{pmatrix}$ bzw. $(\vec\nabla f)_i = \partial_i f$; $\vec\nabla f(r) = f'(r)\frac{\vec x}{r}$
$\vec\nabla = \vec e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \vec e_n\frac{\partial}{\partial x_n} = \vec e_i\partial_i$; $\nabla_e f(\vec x) = \vec e\cdot\vec\nabla f(\vec x)$
$\vec\nabla\cdot\vec f(\vec x) = \sum_{i=1}^3\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_i\partial_i f_i = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$
$\left[\vec\nabla\times\vec f(\vec x)\right]_i = \sum_{j,k=1}^3\varepsilon_{ijk}\partial_j f_k(\vec x) = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$
$\frac{d f(\vec x(t))}{dt} := \frac{\partial f(\vec x(t))}{\partial x_i}\frac{dx_i(t)}{dt}$
$= \partial_i f(\vec x(t))\,v_i(t) = \vec v\cdot\vec\nabla f(\vec x(t))$
$\Delta := \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \vec\nabla^2 = \sum_i\partial_i\partial_i$ $\quad \vec\nabla = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}$

Vektoren / Indexkram

$\vec v = v_i\vec e_i$; $\vec\nabla\cdot\vec v = \vec e_i\,\partial_i v_i$; $\vec\nabla\cdot\vec\nabla = \Delta = \partial_i\partial_i$
$\vec\nabla = \vec e_i\partial_i$; Orthonormal: $\langle\vec e_i, \vec e_j\rangle = \delta_{ij}$; $\langle\vec a, \vec b\rangle = \alpha_i\beta_i$
$\vec e_i\times\vec e_j = \varepsilon_{ijk}\vec e_k$; $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
$|\vec a| = \sqrt{\langle\vec a, \vec a\rangle}$ wenn nicht orthonormal:
$\sqrt{\langle\vec a, \vec a\rangle} = \sqrt{\langle a_i\vec e_i, a_j\vec e_j\rangle} = \sqrt{a_i a_j\langle\vec e_i, \vec e_j\rangle}$
$|\vec a\times\vec b| = |a||b|\sin\varphi$, $\langle\vec a, \vec b\rangle = |a||b|\cos\varphi$

Tensoren

Trafo wie Tensor: $T'_{ij} = R_{ik}T_{kl}R^T_{lj}$

Skalarprodukt: $V\times V\to K$, $(v_1, v_2)\mapsto\langle v_1, v_2\rangle\in K$

Tensor: $T: \underbrace{V\times\ldots\times V}_{\text{Rang } n \text{ mal}}\to K$, $(v_1, \ldots, v_n)\mapsto T(v_1, \ldots, v_n)$

Matrizen

SO(n) & O(n): Def. $AA^T = \mathbb 1 = A^TA \Rightarrow A^T = A^{-1}$
$1 = \det(AA^T) = \det A\det A^T = (\det A)^2 \Rightarrow \det A = \pm1$
$\Rightarrow 1$ für SO(n)
Cramersche Regel: $x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}A_{ji}}{\det A}$ $\quad$ regulär: $\det A\neq0$
orthonormal: $AA^T = \mathbb 1$

$\left(A^{2\times2}\right)^{-1} = \frac1{\det A}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$

$\left(A^{3\times3}\right)^{-1} = \frac1{\det A}\begin{pmatrix}a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\\ a_{22}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}\\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$

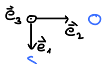
$(AB)^T = B^T\cdot A^T$; $\mathbb 1 = \delta_{ij}$; $\det(\lambda A) = \lambda^n\det A$
$\det(A^T) = \det A$; $\det(AB) = \det A\det B$;
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Scheinkräfte

$\Rightarrow$ nur in beschleunigten Bezugssystemen

$m[(\dot{\vec a} + \vec x)\times\dot{\vec\omega}]$: Drehachse mit Zeit
$2m(\dot{\vec x}\times\vec\omega)$ Coriolis (in rotierenden Systemen)
$m[(\vec\omega\times\vec x)\times\vec\omega] = m\omega^2\vec y$ Zentrifugal (außer Pole)
$m[(\vec\omega\times\vec a)\times\vec\omega]$ Zentrif. i. Ursprung

Coriolis



geografische Breite ϑ
$\vec\omega = \omega\begin{pmatrix}-\cos\vartheta\\ 0\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$ Drehung in "östlicher Richtung"
$\vec\omega_\perp = \begin{pmatrix}0\\0\\ \omega\sin\vartheta\end{pmatrix}$ senkrecht
$\vec\omega_\parallel = \begin{pmatrix}-\omega\cos\vartheta\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tangential
$m\ddot{\vec x} = \vec F_C = 2m(\dot{\vec x}\times\omega_\perp) + 2m(\dot{\vec x}\times\vec\omega_\parallel)$
bei Bew. Nordhalbkugel $\Rightarrow$ rechts / Süd $\Rightarrow$ links
Bew. nach Osten $\Rightarrow$ oben / Westen $\Rightarrow$ unten
$\omega_{Erde} = \frac{2\pi}{60\cdot60\cdot24}$

Zeitabhängige Trafo $\quad R^{-1} = R^T$

$\vec x'(t) = \vec a'(t) + R(t)\,\vec x(t)$
$\dot{\vec x}' = \dot{\vec a}' + \dot R\cdot\vec x + R\cdot\dot{\vec x} = \dot{\vec a}' + R[\dot{\vec x} + R^{-1}\dot R\cdot\vec x]$
$(R^T\dot R)_{ij} = -(R^T\dot R)_{ji} = \begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$ ← antisymmetrisch

Rotierende Erde

inertial
$\vec x'(t) = \vec a(t) + R(t)\,\vec x(t)$
$= R(t)(\vec a + \vec x(t))$
$\dot{\vec x}' = \dot R\vec a + \dot R\vec x + R\dot{\vec x}$
$= R[R^{-1}\dot R\vec a + R^{-1}\dot R\vec x + \dot{\vec x}]$ $\Rightarrow \dot{\vec x} = \dot{\vec a}' + R(\dot{\vec x} + \vec\omega\times\vec x)$ $\quad R^T\dot R\vec x = \vec\omega\times\vec x$
$= R[\dot{\vec x} + R^{-1}\dot R(\vec a + \vec x)]$
$= R[\dot{\vec x} + \vec\omega\times(\vec a + \vec x)]$
$R^T\ddot{\vec x}' = \dot{\vec\omega}\times\dot{\vec x} + \vec\omega\times(\vec\omega\times(\vec a + \vec x)) + \ddot{\vec x}$
$+ \dot{\vec\omega}\times(\vec a\times\vec x) + \vec\omega\times\dot{\vec x}$
$-\vec\nabla V = m\ddot{\vec x} + m\dot{\vec\omega}\times(\vec a + \vec x) + m2\vec\omega\times\dot{\vec x} + m\vec\omega\times(\vec\omega\times(\vec a + \vec x))$

Geometrische Formeln

Kreis: $A = \pi r^2$, $U = 2\pi r$
Zylinder: $V = \pi r^2h$, $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
Kugel: $V = \frac43\pi r^2$

multilinear
$T(\vec x, \vec y + \lambda\vec z) = T(\vec x, \vec y) + \lambda T(\vec x, \vec z)$

Tensor 1. Stufe: $T(\vec x) \Rightarrow$ Vektor
2. Stufe: $T(\vec x, \vec y) = \vec x^TA\vec y = x_iA_{ij}y_j$ (Matrix)
3. Stufe: ε_{ijk}

Trägheitstensor / Volumenintegrale

$\int_{Kugel}dV = \int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\underbrace{|\det J|}_{\text{Kugel: } r^2\sin\vartheta;\ \text{Zylinder: } r} = \frac43\pi R^3$

$\det J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_i}\right) = h_1h_2h_3$