Analytische Mechanik

Harmonischer Oszillator

inh: Ansatz $x_{inh} = Ae^{i\omega t}$, $A = |A| e^{i\delta}$

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c \cdot \cos\omega t$, $\quad x = x_{hom} + x_{inh}$

1) homogene Lsg: Ansatz: $x_h = e^{\lambda t}$, $\quad \delta = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$

Lsg: $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_0\cos(\omega_0 t)$

$z(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$, $\quad x = A\cos(\omega t + \delta)$

$F(x) = -kx$, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Pendel

math. $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

phys. $\left(\frac{R^2}{l} + l\right)\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$

Foucault $\ddot{\vec{x}} - 2\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega} + \omega_0^2 \vec{x} = 0$

Freiheitsgrade / Zwangsbed.

$f = 3N - r$ für starrer Körper: $f = 6$ (3 Eulerwinkel)

holonom $\to r = 0$

rheonom (t-abhäng.); skleronom (t-unabh.)

Hamilton

$\boxed{H(q, p_i, t) = \dot{q}p - L}$ umstellen mit $\dot{q}$

1) $L = T - V$ aufstellen

2) $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ berechnen → nach $\dot{q}$ umstellen

3) alle $\dot{q}$ in $H(q, p, t)$ einsetzen

4) Bewegungsgleichungen/kanonische Gl.:

$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k}$ $\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$ $\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k}$

falls: 1) Zwangsbed. skleronom (unabh. t)
2) T homogen 2. Grades in $\dot{q}_i$
3) V nicht explizit abh. von $\dot{q}_i$

dann: $H = T + V = E$ insb. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 = \frac{dE}{dt}$ Energieerhaltung

Lorentz-Trafo

$x' = \gamma(x - ut)$; $x = \gamma(x' + ut')$

$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$; $t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \frac{v}{c}$

$p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Licht); $p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ E/\beta_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Schall) $\quad E' = ?$

$f = \frac{E}{h}$; $\lambda = \frac{c}{f}$

$\Rightarrow V_x' = \frac{v_x + v}{1 + \frac{v_x v}{c^2}} = \frac{c(\beta_s + \beta)}{1 + \beta_s\beta}$, $\quad V_{y_2}' = \frac{V_{y_2}}{1 + \frac{v_x V}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma}$

Hamilton-Prinzip $\boxed{\delta S = 0}$

$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$

$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)$

Mechanische Eichtrafo. $\boxed{L \Rightarrow L^* = L + \frac{d}{dt}\Omega}$

zeigen, dass Eichtrafo.: es gilt: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

zz: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = 0$ oder $\delta S = \delta\int dt\left(L + \frac{d\Omega}{dt}\right)$

$= \delta S + \underbrace{\Omega(\dot{q}_2, t_2) - \Omega(\dot{q}_1, t_1)}_{\text{const.} \Rightarrow \text{festgehalten}}$

Hamilton-Jacobi

$\boxed{H\left(q, \frac{\partial \Phi}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0}$

1) Hamiltonian aufstellen mit $p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$
2) in Gleichung einsetzen
3) nach Φ auflösen ⇒ Trafo auf Ruhe

Lagrange 1. Art

$\boxed{\sum_{i=1}^{3N}\left(F_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\cdot \delta x_i = 0}$

1) f_j aufstellen ⇒ holonome Zwangsbedingung
2) f_j ableiten / $\vec{\nabla} f_j$ $\quad \boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F} + \vec{Z}}$ $\quad (\vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f) = m\ddot{\vec{x}}$
3) in Gl. einsetzen
4) r Gleichungen nach λ_j auflösen $\quad \vec{F} = -\lambda\vec{\nabla} g$
5) λ_j in verbliebene Gl. einsetzen $\quad \vec{Z} = \lambda\vec{\nabla} g$
6) nach $\ddot{x}_i$ auflösen ⇒ Bewegungsgleichungen

D'Alembert $\boxed{\delta A = (\vec{F} + \vec{Z})\,\delta\vec{x} = 0}$

3) $(\vec{F} - \dot{\vec{p}})\,\delta\vec{x} \stackrel{!}{=} 0$ unser kompatibles $\delta\vec{x}$

1) Zwangsbedingung aufstellen
2) $\vec{Z}\delta\vec{x} \stackrel{!}{=} 0$ und $\vec{F}\cdot\delta\vec{x} = 0$ $\quad (\vec{F} - m\ddot{\vec{x}})\,\delta\vec{x} \stackrel{!}{=} 0$

Beispiel: $\vec{Z}\delta\vec{x} = \vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{x} = \delta_y - \delta x \tan\alpha \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \delta\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}\delta x$

für $f = y - x\tan\alpha = 0$

Kanonische Trafos

es gilt: $\boxed{H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}}$

zeigen, dass kanonische Trafo: (Randpunkte fixed bei Variation)

$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(p_i\dot{q}_i - H) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt\,(p_i'\dot{q}_i' - H') + (\Phi - \ldots)\Big|_{t_1}^{t_2}$

Trägheitstensoren $\boxed{\Theta_{ij} = \int d\vec{x}\,\rho(\vec{x})(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j)}$

1) Koordinaten wählen
2) Integrationsgrenzen festlegen u. lösen
3) $\rho V = m$ einsetzen mit spez. V

Lagrange 2. Art $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$

1) n Freiheitsgrade $\quad V = mgz$
2) n generalisierte Koordinaten (Ableiten!!!)
3) $L = T - V$ aufstellen $\quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
4) zyklische Koordinaten finden: q mit $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$
⇒ Erhaltungsgrößen $E_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$
5) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ und $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ berechnen u. einsetzen
⇒ Bewegungsgleichungen

Stabilität $\boxed{\dot{\vec{z}} = (\vec{z}_1 \text{ aus Lagrange-Gl.})}$

1) DGL in Form $\dot{\vec{z}} = \vec{F}(\vec{z}, t)$; $\vec{z} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$
2) krit. Pkt. suchen $(\vec{F}(\vec{z}_0) = 0)$
3) linearisieren $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial z_j}\Big|_{\vec{z}_0}$
4) $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ Eigenwerte berechnen
5) Aussagen über EW
- imaginär: stabil, Oszillation um krit. Pkt.
- negativ: stabil, asymptotisches Annähern an krit. Pkt.
- positiv: instabil, exponentielles Entfernen von krit. Pkt.

Normalkoordinaten bestimmen

1) T und V aufstellen
2) $T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2)\,\mathcal{T}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$
$V = \frac{1}{2}(x_1, x_2)\,\mathcal{V}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel: $V = \frac{k}{2}(\bar{x}_2 - x_1)^2 = \frac{k}{2}(\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_1^2)$
$\Rightarrow \mathcal{V} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$, $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$

3) $\det(\mathcal{V} - \lambda\mathcal{T}) = 0 \Rightarrow$ EW
4) $(\mathcal{V} - \lambda\mathcal{T})\vec{b} = 0 \Rightarrow$ EV
5) normieren: $\vec{b}_l^T\,\mathcal{T}\,\vec{b}_k = \delta_{kl} = 1$
mit Ansatz: $b_{1,n} = N_1 b_1$

Beispiel: $N_1^2(-m_2, m_1)\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix} = 1$

6) Trafo auf Normalkoordinaten
$\vec{q} = \bar{B}\vec{\xi}$; $\vec{\xi} = \bar{B}^{-1}\vec{q}$ ← Normalkoordinaten
$\bar{B} = (b_{1,n}, b_{2,n})$

wenn $\mathcal{T}$ und $\mathcal{V}$ aus EOM ablesen:
$\boxed{\mathcal{T}\ddot{x} + \mathcal{V}x = 0}$
$\ddot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i = 0$

$\mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathbb{1}$ ⇒ orthogonal ⇒ $\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^{-1}$

Eigenfrequenz: $\omega = \sqrt{\lambda}$ $\quad \boxed{\lambda = 0}$

Kanonische Trafos $\boxed{H' - H = \frac{\partial \Phi}{\partial t}}$

1) Hamiltonian aufstellen
2) Φ wählen
3) neue Parameter berechnen
4) nach q und p umstellen
5) $H(q, p) \to H'(q', p')$
$= H(q(q', p'), p(q', p')) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
6) ggf. Bewegungsgl.
$\dot{p}' = \frac{\partial H'}{\partial q'}$; $\dot{q}' = -\frac{\partial H'}{\partial p'}$

Bew: Wirkungsprinzip ⇔ Lagrange

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\right)dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q \text{ an Randzeiten } 0}$$

wird partiell integriert

$$= \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}_{\stackrel{!}{=}0}\underbrace{\delta q}_{\text{beliebig}}\, dt \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Bew: Wirkungsprinzip ⇔ Hamilton

$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1}(\dot{\vec{q}}\vec{p} - H(\vec{p}, \vec{q}, t))\, dt$

$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left(p_k\delta\dot{q}_k + \dot{q}_k\delta p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k\right)dt$ part. Integ. $\int_{t_0}^{t_1} p_k\delta\dot{q}_k\, dt = p\delta q_k\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\dot{p}_k\delta q_k = -\int_{t_0}^{t_1}\dot{p}_k\delta q_k$

$0 = \delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta p_k\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) - \delta q_k\left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\right]dt$ ⇒ Oberflächenterme verschwinden $\delta q_k|_{t_0} = 0 = \delta q_k|_{t_1}$

Statistische Physik

Informationsentropie

S groß ⇔ viel Unsicherheit $\quad \boxed{S = -\sum_{j=1}^{\Omega} p_j \ln p_j}$

für Entscheidungsbaum z.B. $-2\cdot\frac{2}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right) - 1\cdot\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right)$

mit $\sum_{j=1} p_j = 1$; $p_j \in [0, 1]$

Entropie maximal für $p_j = \frac{1}{\Omega} \Rightarrow S = \ln(\Omega)$

makroskopische Parameter (da $f \approx 10^{21}$): (E, V, p, T)

Mikrozustände $\quad L_h^f = \delta q\, \delta p^f$

Grundpostulat: alle Mikrozustände gleich wahrscheinlich ⇐ Entropie maximal

Wärme: ΔE ohne Änderung äußerer Parameter

Arbeit: ΔE durch Änderung äußerer Parameter

1. Hauptsatz $\quad dE = dQ - dW$ ← Arbeit die vom Gas verrichtet wird

$\boxed{p(\vec{p}_i) = \frac{\Omega(E, x_j)}{\Omega(E)}}$

Liouvillescher Satz

Phasenraumvolumen const. $\frac{d\rho}{dt} = 0$ unter Zeittranslation

$\boxed{\rho(q(t), p(t), t) = \rho(q(0), p(0), 0)}$

$\Rightarrow p(\omega_1)\big|_E = \frac{\Omega(E, \omega_1)}{\Omega(E)}$

Prozessgröße $\quad \delta Q$ unvollst. Diff. $\int \delta Q$ wegabh.

Zustandsgröße $\quad dE$ vollst. Diff. $\int dE$ wegunabh.

$\boxed{\text{für 2 Systeme im GG gilt: } T_1 = T_2;\ P_1 = P_2;\ N_1 = N_2}$

Entropie $\quad \boxed{\text{System isoliert} \Leftrightarrow E = \text{const.}}$ $\quad \boxed{\text{Energie fließt vom warmen ins kalte System} \Rightarrow \text{außer } T \text{ negativ}}$

für ideales Gas gilt:

$\Omega(E) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h_0^f}\frac{\pi^{f/2}}{\left(\frac{f}{2}\right)!}\, m f\, (2mE)^{f/2}$ $\quad \boxed{S(E, V, N) \approx k_B N\left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{4\pi m E}{3N}\right) + \frac{5}{2}\right]}$

mit Permutation:
$\ln(\Omega(E)) \approx N\left[\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{4\pi m E}{3N}\right) + \frac{5}{2}\right]$

$\boxed{dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN}$ Zustandsgleichung

Stirling $\quad \ln N! \approx N\ln(N) - N$

physikalische Entropie $\quad \boxed{S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)}$

ideales Gas:

Temperatur $\boxed{\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}}$ $\boxed{E = \frac{f}{2}k_B T}$

$\boxed{dS > 0}$

Druck $\boxed{\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}}$ $\quad \boxed{\text{Teilchen fließen von großem zu kleinem chemischen Potential}}$

chemisches Pot. $\boxed{-\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial N}}$ $\quad \boxed{PV = k_B N T}$ Zustandsgleichung

2. Hauptsatz $\quad dS \geq 0$

3. Hauptsatz $\quad T \to 0 \Leftrightarrow E \to 0 \Leftrightarrow S \to 0$

für quasistatisch: $dS = \frac{dQ}{T}$ $\quad PV =$
$\Rightarrow \Delta\Omega = 0$ reversibel
$\Rightarrow \Delta\Omega > 0$ irreversibel

Noether

1) Trafo angeben $t \to t' = t + \delta t$
$\vec{x}(t) \to \vec{x}'(t') = \vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t)$
2) L invariant $\quad L(x, \dot{x}, t) \to L(x', \dot{x}', t') = L(x, \dot{x}, t) + \frac{d f(x, t)}{dt}$
3) Noether gibt Erhaltungsgröße $\quad \boxed{\vec{p}\delta\vec{x} - H\delta t - f(\delta\vec{x}, \delta t)}$ ← erhalten

Energie: $\varkappa = q$, Drehimpuls: $\varkappa = \varepsilon_{ijk} n_j x_k$
Impuls: $\varkappa = \vec{n}$, Schwerpkt.impuls: $\varkappa = \vec{v}t$

1) Trafo angeben $\quad q_i(t) \to q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$ $\quad = \varepsilon\varkappa_i(t)$
2) L invariant $\quad \delta L = \varepsilon\frac{d}{dt}f(q, \dot{q}, t)$
3) Noether gibt Erhaltungsgröße $\quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\varkappa_i - f}$ ← erhalten $\quad \varkappa = \frac{dq'}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon = 0}$

Vollständige Differentiale prüfen

1) $dG = A\,dx + B\,dy + C\,dz$
2) berechne: $\frac{\partial A}{\partial y}; \frac{\partial A}{\partial z}; \frac{\partial B}{\partial x}; \frac{\partial B}{\partial z}; \frac{\partial C}{\partial x}; \frac{\partial C}{\partial y}$
3) $dG = dG \Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$; $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$; $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}$

Fkt. bestimmen:
$\frac{\partial G}{\partial x} = A$; $\frac{\partial G}{\partial y} = B$; $\frac{\partial G}{\partial z} = C$

Legendre-Trafo $f(x) \to \tilde{f}(u)$

1) $u = \frac{df(x)}{dx}$ $\quad$ mehrere Variablen:
2) $\tilde{f}(u) = xu - f(x)$ $\quad \tilde{f}(\vec{u}, \vec{y}) = \sum_i u_i x_i - f(\vec{x}, \vec{y})$

Maxwell-Relationen

$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$ $\quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$ $\quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

$pV = n\cdot N_A\cdot k_B\cdot T = n\cdot R\cdot T$

$pV = Nk_B T$ mit $N = n\cdot N_A$

$pV = nRT$ mit $R = \frac{N k_B}{n}$

für ideales Gas:
$K_T = \frac{1}{P}$
$\alpha = \frac{1}{T}$
$C_p - C_V = k_B N$

Quasistatisch $\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}}$

↳ $dE = TdS - pdV + \mu dN$

$R = \frac{nk_B}{N} = Nk_B$?

$\boxed{C_p > C_V}$ $\quad c_p = \frac{5}{2}R$, $c_V = \frac{3}{2}R$

Wärmekapazitäten

$C_x = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_x$ ← x = const

$\Rightarrow dQ = \sum_x c_x\, dT$

$\Omega(E)$ bestimmen (kontinuierlich) - Toolkit

1) Hamiltonian / Energie aufstellen
z.B. $H = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x_i^2$

2) $\Phi(E) = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^f}\int_{0 \leq H \leq E} dq_1 \ldots dq_f\, dp_1 \ldots dp_f$ $\quad \int \prod_{i=1}^{N} dx_i dy_i$

3) können wir Symmetrien nutzen? z.B. $= (\pi R^2)^N$

4) verallgemeinerte Koordinaten einführen
$H = \sum_{i=1}^{N}\xi_{x_i}^2 + \xi_{p_{x_i}}^2 + \ldots$ $\quad$ z.B. $\xi_{p_i} = \frac{p_i}{\sqrt{2m}} \Rightarrow dp_i = \sqrt{2m}\, d\xi_{p_i}$

5) ξ substituieren im Integral

6) $\int d\xi_1 \ldots d\xi_{2N}$ als Kugelvolumen interpretieren mit $V_{Kugel}^N(\sqrt{E})$

7) Kugelvolumen ausrechnen $V_{Kugel} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n$

8) $\Omega(E) \times \delta E = \Phi(E + \delta E) - \Phi(E) = \frac{\partial \Phi(E)}{\partial E}\delta E$

anschließend: $S = k_B\ln\Omega(E)$; $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$

⇒ ggf. $\Gamma(N+1) = N!$ benutzen u. $\ln(N!) = N\ln(N) - N$

Thermodynamik-Rezept

1) gg: z.B. Entropieänderung ⇒ $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$

2) passende Größe suchen
$E(S, V)$ $\quad dE = TdS - PdV$
$F(T, V) = E(S, V) - TS$ $\quad dF = -SdT - PdV$
$H(S, P) = E(S, V) + PV$ $\quad dH = TdS + VdP$
$G(T, P) = F(T, V) + PV = E(S, V) - TS + PV$ $\quad dG = -SdT + VdP$

3) z.B. $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$ u. $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$

4) Maxwell-Relation herleiten: Satz v. Schwarz:
$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$
$\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$
$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$

Allgemeines & Mathe

Lagrange-Multiplikatoren

f Fkt.; g holonome NB.

⇒ bei 2 NB ⇒ 2 λ $\boxed{\nabla(f+\lambda g)\stackrel{!}{=}0}$

Ableiten $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Logarithmusregeln $\ln(1)=0$

$\log(x)+\log(y)=\log(x\cdot y)$

$\ln(0)\to-\infty$ $\ln(>1)\to$ positiv

$\ln(<1)\to$ negativ

$\boxed{\begin{aligned}&\text{EW: } \det(A-\lambda\mathbb{1})=0\\&\text{EV: } (A-\lambda\mathbb{1})\vec{x}=0\end{aligned}}$

BAC-CAB: $\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\cdot\vec c)-\vec c(\vec a\cdot\vec b)$

Eulersche Formel

$e^{iy}=\cos(y)+i\sin(y)$

$e^{-iy}=\cos(y)-i\sin(y)$

Integrale $\int\sin^2(x)dx=-\frac{\sin(2x)-2x}{4}$

mit $\sin^2(x)=\frac12(1-\cos(2x))$

Taylornäherung:

$\cos\varphi=1+\mathcal{O}(\varphi^2)$

$\sin\varphi=\varphi+\mathcal{O}(\varphi^3)$

Trigonometrische Identitäten

$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$

$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y)$

$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

n-dim Kugel

Volumen $V_n(R)=\int d^nx=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac n2+1)}R^n$

$S_n(R)=\frac{d}{dR}V_n(R)$

Oberfläche $S_n(R)=\int\delta(r-R)\,d^nx=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac n2)}R^{n-1}$

Gammafunktion $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

$d^nx=d\Omega_n r^{n-1}dr$

Koordinatenstuff $\boxed{dA=r\,dr\,d\varphi}$ $\boxed{\dot{\vec x}^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}$

Polar: $\vec x=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}$

$\dot{\vec x}=\dot r\vec e_r+r\dot\varphi\vec e_\varphi$

$\ddot{\vec x}=\vec e_\varphi(2\dot r\dot\varphi+r\ddot\varphi)+\vec e_r(\ddot r-r\dot\varphi^2)$

$\ddot{\vec x}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}(2\dot r\dot\varphi+r\ddot\varphi)+\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}(\ddot r-r\dot\varphi^2)$

$\vec e_\parallel=\vec e_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}\Rightarrow h_r=1$

$\vec e_\perp=\vec e_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}\Rightarrow h_\varphi=r$

$\boxed{\dot{\vec e}_r=\dot\varphi\vec e_\varphi;\ \dot{\vec e}_\varphi=-\dot\varphi\vec e_r}$

$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$

Zylinder: $\vec x=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\z\end{pmatrix}$

$\boxed{\dot{\vec x}^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2}$ $\boxed{dV=r\,dr\,d\varphi\,dz}$

$\vec e_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}\Rightarrow h_r=1$

$\vec e_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\0\end{pmatrix}\Rightarrow h_\varphi=r$

$\vec e_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow h_z=1$

$\vec\nabla\cdot\vec F=\frac1r\partial_r(rF_r)+\frac1r\partial_\varphi F_\varphi+\partial_zF_z$

$\vec\nabla\times\vec F=\left[\frac1r\partial_\varphi F_z-\partial_zF_\varphi\right]\vec e_r+\left[\partial_zF_r-\partial_rF_z\right]\vec e_\varphi+\frac1r\left[\partial_r(rF_\varphi)-\partial_\varphi F_r\right]\vec e_z$

$\vec\nabla f=\vec e_r\partial_rf+\frac{\vec e_\varphi}{r}\partial_\varphi f+\vec e_z\partial_zf$

Kugel: $\vec x=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\sin\vartheta\\r\sin\varphi\sin\vartheta\\r\cos\vartheta\end{pmatrix}$

$\boxed{dV=r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi}$

$\vec e_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\\sin\varphi\sin\vartheta\\\cos\vartheta\end{pmatrix}\Rightarrow h_r=1$

nicht wenn r fix

$\boxed{\dot{\vec x}^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2\sin^2\vartheta+r^2\dot\vartheta^2}$

$\vec e_\vartheta=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\\sin\varphi\cos\vartheta\\-\sin\vartheta\end{pmatrix}\Rightarrow h_\vartheta=r$

$\vec e_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\\0\end{pmatrix}\Rightarrow h_\varphi=r\sin\vartheta$

$\vec\nabla f=\vec e_r\partial_rf+\frac{\vec e_\vartheta}{r}\partial_\vartheta f+\frac{\vec e_\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi f$

$\Rightarrow\vec\nabla f(r)=\frac{df}{dr}\vec e_r=f'(r)\vec e_r$

$\vec\nabla\times\vec F=\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta(F_\varphi\sin\vartheta)-\partial_\varphi F_\vartheta\right]\vec e_r+\frac1r\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi F_r-\partial_r(rF_\varphi)\right]\vec e_\vartheta+\frac1r\left[\partial_r(rF_\vartheta)-\partial_\vartheta F_r\right]\vec e_\varphi$

Raumwinkel: $\int_0^\pi d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi$

$\vec\nabla\cdot\vec F=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi F_\varphi+\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta F_\vartheta)$

Statistik

$\binom nk=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$

1. Moment $\bar v=\langle v\rangle=\int dv\,v\cdot W(v)$

2. Moment $\bar{v^2}=\langle v^2\rangle=\int dv\,v^2\cdot W(v)$

Standardabweichung $\sigma=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}$

Varianz: $\sigma_v^2=\bar{v^2}-\bar v^2$

Integrale

$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac12\sqrt{\frac\pi a}$

u ↑ Logarithmus, Inverse Winkel, Algebraisch, Trigonometrisch, E-Fkt ↓ v'

$f(x)=u\cdot v'$

$F(x)=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$

$\int x^2e^x=(x^2-2x+2)e^x$

$\int x\,e^x=(x-1)e^x$

Feynman-Trick $\int dv\,v^3e^{-av^2}=\int dv\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)v\,e^{-av^2}$

Gauß-Integral $\int dv\exp(-av^2)=\frac12\sqrt{\frac\pi a}$

homogen vom Grad k $f(\lambda\vec x)=\lambda^kf(\vec x)$ ⇒ dann gilt: $\vec x\cdot\vec\nabla f(\vec x)=k\,f(\vec x)$

Taylor Linearisierung

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

Gauß-Integral $\int dx\left(e^{-x^2}\right)=\sqrt\pi$

komplex konjugiert

$z=z_1+iz_2$; $z=|z|e^{i\varphi}$

$z^*=z_1-iz_2$; $z^*=|z|e^{-i\varphi}$

hermitesch: $A^+=A$ mit $A^+=(A^*)^T=(a^*_{ji})$

totale Ableitung $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}$

$\frac{df(\vec x(t))}{dt}=\frac{\partial f(\vec x(t))}{\partial x_i}\frac{dx_i(t)}{dt}$

DGLs $\boxed{\ddot\alpha+\frac g\ell\cos\alpha=0}$

$u=\dot\alpha$, $\ddot\alpha=\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=\dot\alpha\frac{du}{d\alpha}=u\frac{du}{d\alpha}$

mit int. Fakt.: $\dot\alpha\ddot\alpha+\dot\alpha\frac g\ell\cos\alpha=0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac12\dot\alpha^2+\frac g\ell\sin\alpha\right)=0\Rightarrow\dot\alpha^2+\frac{2g}{\ell}\sin\alpha=C$

wichtige Taylor-Reihen

$e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

$\ln(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\dots$

$\sin(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots$

$\cos(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\dots$

Vektorfelder, Differentialoperatoren

$\vec\nabla f(\vec x)=\begin{pmatrix}\partial_1f\\\vdots\\\partial_nf\end{pmatrix}$ bzw. $(\vec\nabla f)_i=\partial_if$; $\vec\nabla f(r)=f'(r)\frac{\vec x}{r}$

$\vec\nabla=\vec e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+\vec e_n\frac{\partial}{\partial x_n}=\vec e_i\partial_i$; $\nabla_{\vec e}f(\vec x)=\vec e\cdot\vec\nabla f(\vec x)$

$\vec\nabla\cdot\vec f(\vec x)=\sum_{i=1}^3\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=\sum\partial_if_i=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$

$[\vec\nabla\times\vec f(\vec x)]_i=\sum_{j,k=1}^3\epsilon_{ijk}\partial_jf_k(\vec x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$

$\frac{df(\vec x(t))}{dt}:=\frac{\partial f(\vec x(t))}{\partial x_i}\frac{dx_i(t)}{dt}=\partial_if(\vec x(t))\,v_i(t)=\vec v\cdot\vec\nabla f(\vec x(t))$

$\Delta=\vec\nabla\cdot\vec\nabla=\vec\nabla^2=\sum\partial_i\partial_i$; $\vec\nabla=\begin{pmatrix}\partial_1\\\partial_2\\\partial_3\end{pmatrix}$

Vektoren/Indexkram $\langle\vec a,\vec b\rangle=a_ib_i$

$\vec v=v_i\vec e_i$; $\vec\nabla\cdot\vec v=\vec e_i\partial_iv_i$; $\vec\nabla\cdot\vec\nabla=\Delta=\partial_i\partial_i$

$\vec\nabla=\vec e_i\partial_i$; Orthonormal: $\langle\vec e_i,\vec e_j\rangle=\delta_{ij}$

$\vec e_i\times\vec e_j=\varepsilon_{ijk}\vec e_k$; $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$

$|\vec a|=\sqrt{\langle\vec a,\vec a\rangle}$ wenn nicht orthonormal:

$\sqrt{\langle\vec a,\vec a\rangle}=\sqrt{\langle a_i\vec e_i,a_j\vec e_j\rangle}=\sqrt{a_ia_j\langle\vec e_i,\vec e_j\rangle}$

$|\vec a\times\vec b|=|a||b|\sin\varphi$, $\langle\vec a,\vec b\rangle=|a||b|\cos\varphi$

Aufgaben

Gekoppelte Punktmassen

$T=\frac{m_1}{2}\dot x_1^2+\frac{m_2}{2}\dot x_2^2$, $V=\frac k2(x_2-x_1-L_0)^2$

$F=m_1\ddot x_1=-\frac{\partial V}{\partial x_1}$

Gekoppelte, ungedämpfte Oszis

$T=\frac m2(\dot x_1^2+\dot x_2^2)$

$V=\frac k2(x_1-d)^2+\frac{k_{12}}{2}(x_2-x_1-d)+\frac k2(x_2-2d)^2$

$q_1=x_1-d$, $q_2=x_2-2d$

Zwangsbedingungen

Kugeloberfläche: $\vec r^2-R^2(t)=0$

Massenpkt. mit Stange: $(\vec r_1-\vec r_2)^2-L^2=0$

starrer Körper (N Pkt.): $f=6$

gleichseit. Δ: $a=(\vec r_1-\vec r_2)^2=(\vec r_2-\vec r_3)^2=(\vec r_3-\vec r_1)^2$

entlang Kurve $\begin{pmatrix}x\\x\sin(x)\\e^{-x^2}\end{pmatrix}$: $y=x\sin x$, $z=e^{x^2}$

Zwangskräfte $y=f(x)$ mit $\vec F_g=mg\vec e_z$

ZB: $y-f(x)=0$; $\nabla g(x)=\begin{pmatrix}-f'\\1\end{pmatrix}$; $\ddot y=f''\dot x^2+f'\ddot x$

$v^2=\dot x^2+\dot y^2$, $\dot x^2=\frac{v^2}{1+f'^2}$

Schiefe Ebene (d'Alembert)

ZB: $y-x\tan\alpha=0$, $\ddot x=-\frac{g\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-g\sin\alpha\cos\alpha$

$\vec Z=m\ddot{\vec r}-\vec F_g=mg\cos\alpha\,\vec e_p$

Perle auf Spirale $\vec r(t)=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}$

ZB: $x^2+y^2-r^2=0$; $\vec F=0$

äußere Radialkraft: nur $\vec e_r$, $\vec Z=\dot{\vec p}-\vec F$

Doppelschacht

I) $x_1=0$, II) $y_2=0$, III) $y_1^2+x_2^2-\ell^2=0$

$y_1=\ell\sin\alpha$, $\dot y_1=\ell\dot\alpha\cos\alpha$

$x_2=\ell\cos\alpha$, $\dot x_2=-\ell\dot\alpha\sin\alpha$

Doppelte schiefe Ebene

I) $\tan\alpha\,x_1-y_1=0$, II) $\tan\beta\,x_2-y_2=0$

III) $\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}-L=0$

$\vec x_1=-(L-\ell_2)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$, $\vec x_2=\ell_2\begin{pmatrix}\cos\beta\\-\sin\beta\end{pmatrix}$

Bsp. Kreisel

$T_{rot}=\frac12\vec\omega^T\Theta\vec\omega$

im Hauptachsensystem: $\Theta_1=\Theta_2$

$L=\frac{\Theta_1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{\Theta_2}{2}\omega_3^2$

$=\frac{\Theta_1}{2}(\dot\varphi^2\sin^2\vartheta+\dot\vartheta^2)+\frac{\Theta_3}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta+\dot\psi)^2$

Symmetrien & Erhaltungsgrößen

Zentralpot.: Drehimpuls erh.

hom. Feld mit $\vec F=$ const. u. $V(\vec r)=-\vec F\vec r$

⇒ Drehimpuls $\parallel\vec F$, Impulserh. $\perp\vec F$

Zylinderförmiges Feld: Impulserh. entlang z-Achse, Drehimpulserh. um z-Achse

Gekoppelte Schwingung (Eigenschwingung)

$\vec x=\begin{pmatrix}x+L\sin\varphi\\-L\cos\varphi\end{pmatrix}$ Pendel: $\boxed{\vec x=\begin{pmatrix}L\sin\varphi\\-L\cos\varphi\end{pmatrix}}$

$T=\frac m2(\dot x^2+2\dot\varphi L\cos\varphi\,\dot x+\dot\varphi^2L^2)+\frac M2\dot x^2$

$V=-mgL\cos\varphi+\frac12kx^2$

DGL lösen

1) Ansatz: $e^{i\omega t}$

2) ω-bestimmen

3) allg. Lsg: $u(t)=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$

4) C_1 u. C_2 mit AB bestimmen

DGLs

$\ddot r-\omega^2r=0$

$\Rightarrow r(t)=Ae^{\omega t}+Be^{-\omega t}$

Kanonische Trafos: EOM → invariant, H n. invariant

Phasenraum → invariant

Mechanik

Feder $E_{pot}=\frac12kx^2$

Drehimpuls $\vec L=\vec r\times\vec p$

Auf einen Blick:

- Kugelkoordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Polarkoordinaten
- math. Pendel $\vec x=\begin{pmatrix}L\sin\varphi\\-L\cos\varphi\end{pmatrix}$
- Schwerpunkt

Logarithmusgesetze

$\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$

$\ln\left(\frac1a\right)=-\ln(a)$

$\ln(a^n)=n\ln(a)$

Kürzeste Verbindung zw. 2 Pkt.

$S[y]=\int_{P_1}^{P_2}ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$

$\boxed{\delta S=0\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0}$

$y(x)=cx+d$

Hängende Kette

$F[h]=\int dm\,gh=\int\frac mL gh\,ds=\int_{-a}^a\frac mL gh\sqrt{1+h'^2}dx$

da Seil homogen: $dm=\frac mL ds$

$G[h]=\int ds-L=0=\int_{-a}^a\sqrt{1+h'^2}dx-L\stackrel!=0$

$\delta(F[h]+\lambda G[h])=0$

$\delta\Big(\underbrace{\int_{-a}^a\frac{mg}{L}h(x)\sqrt{1+h'^2(x)}+\lambda\sqrt{1+h'^2(x)}dx}_{\text{Lagrangian}}-\underset{\text{const.}}{L}\Big)\stackrel!=0$

⇒ Randbedingungen symmetrisch

Ω(E) mit Maxwell

$\phi(E)=\frac{V^N}{h^f}\int_0^R dp_1\dots dp_f$ $R=\sqrt{\sum_i^N\vec p_i^2}=\sqrt{2Em}$

mit einem festgelegten Impuls p_i:

$\Omega_i\left(E-\frac{\vec p_i}{2m}\right)=V^N\frac{d}{dE}V_{3(N-1)}\left(\sqrt{2mE-\vec p_i^2}\right)$

$p(\vec p_i)=\frac{\Omega_i(E-\frac{\vec p_i}{2m})}{\Omega(E)}$

$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\vec p_i^2}{2mE}\right)^{\frac{3(N-1)}{2}-1}=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\vec p_i^2}{N\langle p^2\rangle}\right)^N$

$=\exp\left(-\frac32\frac{\vec p_i^2}{\langle p^2\rangle}\right)$

Hamilton

Kugelkoordinaten

$T=\frac m2(r^2\dot\vartheta^2+r^2\dot\varphi^2\sin^2\vartheta)$

Pendel $\vec x=\begin{pmatrix}L\sin\varphi\\-L\cos\varphi\end{pmatrix}$

Feder $V=\frac12kx^2$

harm. Oszi. $H=\frac{p_i^2}{2m}+\frac m2\omega^2x_i^2$

Rutschen vom Tisch $dm=\frac ML d\ell$

homogenes Seil: $dT=\frac12dm\,\dot x^2$

$dV=-dm\,g\,\ell$

Gauß: $x=(x-\mu)+\mu$

$\langle x\rangle=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty(x-\mu)e^{\cdots}dx}_{0}+\mu\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^\infty e^{\cdots}dx}_{1}=\mu$

Galilei-Trafos

$\vec p\cdot\delta\vec x-H\delta t-f=$ const

$f(\vec x,t)=\frac{\vec v^2t}{2}m+\vec vRm\vec x$

δt: ⇒ $-H\delta t=$ const ⇒ Energieerhaltung

$\delta\vec x=\delta\vec a$: ⇒ $\vec p\cdot\delta\vec a=$ const. ⇒ Impulserhaltung

$\delta\vec x=\delta\vec v\,t$: ⇒ $\vec p\,\delta\vec v\cdot t-m\vec x\delta\vec v=$ const.

⇒ $\vec pt-m\vec x=$ const. ⇒ Bew. auf Trägheitsbahnen

δR: $\dot{\vec x}'=R(\dot{\vec x}+\vec\omega\times\vec x)=R\vec\omega\times\vec x$ da $\dot{\vec x}=0$

$\frac{\delta\vec x'}{\delta t}=(\mathbb{1}_3+\delta R)\frac{\delta\vec\varphi}{\delta t}\times\vec x$ ⇒ $\delta\vec x=\delta\vec\varphi\times\vec x$

⇒ $\vec p(\delta\vec\varphi\times\vec x)=$ const.

⇒ $\delta\vec\varphi\underbrace{(\vec x\times\vec p)}_{\vec L}=$ const. ⇒ Drehimpulserhaltung

Zylinder auf schiefer Ebene

Trägheitsmoment: $\frac12\sum m_i(\vec\omega(t)\times\vec r_i(t))^2=\frac12 J\omega^2$

ZB: $\varphi R=s\Rightarrow\dot s=\dot\varphi R$

$L=\frac M2\dot s^2+\frac J2\frac{\dot s^2}{R^2}+Mgs\sin(\alpha)$

im Phasenraum:

harm. Oszi.: Ellipse

gedämpft. h. Oszi.: Spirale (da Energieverlust)

Drehimpuls: $\vec L=\vec r\times\vec p$ oder $L=mr^2\dot\varphi$

Keplerproblem $\nabla V=-\frac{k}{r^2}$

$\frac{\partial V}{\partial x_j}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j}=\frac{dV}{dr}\frac{x_j}{r}$ $\frac{d\vec p^2}{dt}=-2m\frac{dV}{dt}$

$\vec x\vec\nabla V=-V$ ⇒ Euler

$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\dot r$, $\vec p^2\dot x_j=p_j\dot{\vec x}\vec p$, $\frac{\vec x\cdot\vec p}{r}=m\dot r$

Oszillator

$\ddot x+a\dot x+bx=c\cos(\tilde\omega t)$

$\boxed{F=m\ddot x=-\frac{\partial V}{\partial x}=m\dot p}$ $\boxed{\frac{d}{dt}(T+V)=0}$

Galilei-Trafos

$t'=t+\tau$

$\vec x'=\vec a_0+\vec vt+R\vec x$

Expandierendes ideales Gas

kein Wärmeaustausch, keine Arbeit verrichtet

⇒ E = erhalten ⇒ $\frac32k_BNT=$ const ⇒ T = const

Trägheitstensoren

Zylinder: $\Theta_{11}=m\left(\frac{1}{12}\ell^2+\frac14R_k^2\right)=\Theta_{22}$

$\Theta_{33}=\frac12R_km$

$T_{rot}=\frac12\omega^2\Theta_{33}$

Kugel: $\Theta_{11}=\Theta_{22}=\Theta_{33}=\frac{8}{15}\rho(r_a^5-r_i^5)\pi$

Polar: $\Theta_{11}=\Theta_{22}=\frac14R^2$

Foucaultsches Pendel Coriolis: $2m\dot{\vec x}\times\vec\omega$

$\ddot{\vec x}-2\dot{\vec x}\times\vec\Omega+\omega_0^2\vec x=0$ mit $\dot{\vec x}\times\vec\Omega=\begin{pmatrix}\dot y\Omega_z\\-\dot x\Omega_z\\\dot x\Omega_y-\dot y\Omega_x\end{pmatrix}$

$\mathrm{I}+i\mathrm{II}\Rightarrow\ddot\xi+2i\Omega_z\dot\xi+\omega^2\xi=0$

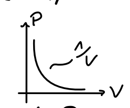
mit $\xi=x+iy$, gelöst durch $\xi(t)=e^{-i\Omega_zt}e^{i\omega t}$

$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\Omega_zt)&\sin(\Omega_zt)\\-\sin(\Omega_zt)&\cos(\Omega_zt)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\end{pmatrix}$ Realteil imaginär

Arbeit am Gummiball

$W=-\int\delta W=-\int P\,dV$

Arbeit am Ball



$W_{\gamma_1}=-\int_{T_1}^{T_2}\alpha VP_1\,dT+\int_{P_1}^{P_2}P\kappa V\,dP$

für Steigung: $dT=dP\frac{T_1-T_2}{P_2-P_1}$

Kanonische Trafos

$\Phi_1(q,q',t)$ $p_i=\frac{\partial\Phi_1}{\partial q_i}$; $p_i'=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial q_i'}$

$\Phi_2(q,p',t)$ $p_i=\frac{\partial\Phi_2}{\partial q_i}$; $q_i'=\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_i'}$

$\Phi_3(p,q',t)$ $q_i=-\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_i}$; $p_i'=-\frac{\partial\Phi_3}{\partial q_i'}$

$\Phi_4(p,p',t)$ $q_i=-\frac{\partial\Phi_4}{\partial p_i}$; $q_i'=\frac{\partial\Phi_4}{\partial p_i'}$

Noether für V = mgz

$L=\frac m2\dot{\vec x}^2-mgz$

L_z: gehört zu Drehung um z-Achse ($\vec x\to\vec x+\delta R$)

1) L invariant unter Drehung um z ($|\dot{\vec x}|$ inv., z inv)

2) $\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\delta x_i=\vec p\underbrace{(\vec e_z\times\vec x)}_{\vec e_z\times\vec x}=\vec e_z(\vec p\times\vec x)=L_z$

d'Alembert gilt nur im GG

$(A^{2\times2})^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$

$(A^{3\times3})^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}&a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}&a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\\a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}&a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}&a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}\\a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}&a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}&a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$

$(b-a)(b^2+a^2+ab)=b^3-a^3$

Altklausurentypen

Schiefer Wurf

$L=T-V=\frac m2(\dot x^2+\dot z^2)-mgz$

$\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{\partial S}{\partial b}=0$

Zwerge & Paramagneten

$\Omega=\binom Nn=\frac{N!}{n!(N-n)!}$

T<0 ⇒ da Zugabe von mehr Energie die Menge an mögliche Zuständen verringert, was per Def. negativer Temperatur entspricht ⇒ bei E=0 gilt es die meisten möglichen Zustände

Noether-Drehimpuls

$x'=x(-x+\cos(\varepsilon)x-\sin(\varepsilon)y)=x-x+x-\varepsilon y$

$=x-\varepsilon y$ ⇒ $-y=\mathcal{X}$

$\vec L=\begin{pmatrix}y\dot z-z\dot y\\z\dot x-\dot zx\\x\dot y-\dot xy\end{pmatrix}$ ist erhalten

Wagen mit Pendel

$\vec x=\begin{pmatrix}\ell\sin\varphi+d\\-\ell\cos\varphi+h\end{pmatrix}$

Liouville-Gleichung $\vec v=(\dot q\dots,\dot p\dots)$

zz: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec v\rho)=0$

$\vec\nabla(\vec v\rho)=\sum_{i=1}^f\left(\frac{\partial(\dot q_i\rho)}{\partial q_i}+\frac{\partial(\dot p_i\rho)}{\partial p_i}\right)$

$=\sum_{i=1}^f\left(\frac{\partial\dot q_i}{\partial q_i}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial\dot p_i}{\partial p_i}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\dot p_i\right)$

Satz v. Schwarz: $\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q_i\Rightarrow\frac{\partial\dot q_i}{\partial q_i}=\frac{\partial^2H}{\partial p_i\partial q_i}$

$\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot p_i\Rightarrow\frac{\partial\dot p_i}{\partial p_i}=-\frac{\partial^2H}{\partial q_i\partial p_i}$

Pendel mit rotierender Aufh.

$\vec x=\begin{pmatrix}L\sin\varphi+a\cos(\omega t)\\-L\cos\varphi+a\sin(\omega t)\end{pmatrix}$

Drehung auf Tisch $r(t)=\ell-\omega t$

Polar, $L=\frac m2\left(\omega^2+(\ell-\omega t)^2\dot\varphi^2\right)$

$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{d\varphi}{dt}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1}=\frac{\dot\varphi}{\dot r}$

$\vec L=\vec r\times\vec p$, $\vec L(0)=\vec r(0)\times m\vec v(0)$

$=\ell\vec e_r\times mv_0\vec e_\varphi$

$=\ell mv_0\vec e_z$

Schiefe Ebene

$\vec x_i(t)=\vec S(t)+\vec r_i(t)$, $\vec S(t)=\vec S(0)+\vec s(t)$

$\dot{\vec x}_i(t)=\dot{\vec s}(t)+\dot{\vec r}_i(t)$

$T=\underbrace{\frac12M\dot{\vec s}^2}_{\text{Trans.}}+\underbrace{\frac12J\omega^2}_{\text{Rot}}$

Normalkoordinaten, harm. Oszi

$\xi_i(t)=A_i\cos(\omega_it)+B_i\sin(\omega_it)=C_i\cos(\omega_it+\delta_i)$

$\vec q=B\vec\xi=\sum_i\xi\vec b^i$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=C_1\cos(\omega_1t+\delta_1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\cos(\omega_2t+\delta_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Taylor: $\sin(x)\approx x$, $\cos(x)\approx1$,

$\ln(1\pm x)\approx\pm x$, $\frac{1}{(1\pm x)^b}\approx1\mp bx$

Partialbruchzerlegung

1) Nullstelle raten

2) ggf. Polynomdivision + Faktorisierung

3) $\frac{6x^2-5x-5}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$

4) Nullstellen einsetzen um A,B,C zu bestimmen